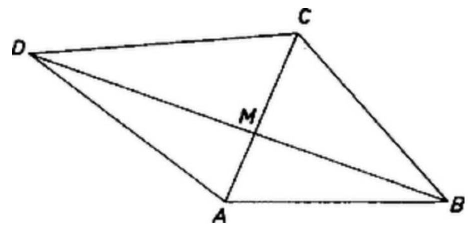
I. megoldás. Jelöljük egy $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontját M-mel (2. ábra). Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ABM, BCM, CDM, DAM háromszögekre

$$AB < AM + BM, \qquad BC < BM + CM,$$
$$CD < CM + DM, \qquad DA < DM + AM.$$

A négy egyenlőtlenséget összeadva

$$AB + BC + CD + DA < 2(AM + BM + CM + DM) = 2(AC + BD).$$

A bal oldal nem kisebb a legkisebb oldal 4-szeresénél, a jobb nem nagyobb a nagyobb átló négyszeresénél, s így valóban a legkisebb oldal kisebb a nagyobbik átlónál.



2. ábra

II. megoldás. Vizsgáljuk pl. a négyszög AB oldalát és AC átlóját. Ha $AB < AC$, akkor a feladat állítása érvényes: a legkisebb oldal biztosan kisebb a nagyobbik átlónál.

Ha $AB \geq AC$, akkor megmutatjuk, hogy az AB-vel szemben levő oldal kisebb a másik átlónál: $CD < BD$. A feltételből ugyanis következik (az ABC háromszögre alkalmazva az oldalak és szögek közti összefüggést), hogy

$$ACB\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle.$$

Másrészt konvex négyszög átlói két részre osztják a négyszögnek a végpontjaikban levő szögeit, így

$$DCB\sphericalangle > ACB\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle > DBC\sphericalangle.$$

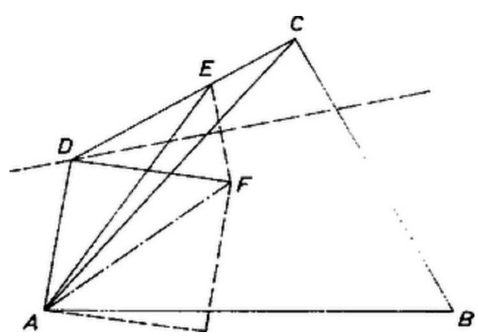
Ebből ismét az oldalak és szögek közti összefüggés alapján nyerjük, hogy $BD > CD$, amint állítottuk. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A feladat állításánál többet is bizonyítottunk: konvex négyszög bármelyik szemben fekvő oldalpárjának egyik tagja kisebb valamelyik átlónál (tehát a hosszabb átlónál minden esetre kisebb), s így legalább két oldal kisebb, mint az átlók hosszabbika. Azt is látjuk, hogy ha csak két ilyen oldal van, ezek szomszédosak.

2. A megoldásból az is következik, hogy ha valamelyik oldal nem kisebb egyik átlónál sem, akkor a szemben fekvő oldal mindkét átlónál kisebb.

3. A rövidebb átlóra a bizonyítás azt adja, hogy ahány oldal nem kisebb a rövidebb átlónál, legalább annyi a hosszabbik átlónál kisebb oldal van.

III. megoldás. Legyen a négyszög legnagyobb szöge az ADC szög (3. ábra). Ez legalább 90°, különben ugyanis a szögek összege nem lehetne 360°. Így az ADC szög nagyobb az ADC háromszög másik két szögénél. Ezért az ADC szöget bezáró DA és DC oldalak – egyszersmind a négyszögnek is oldalai – kisebbek a háromszög AC oldalánál, ami a négyszögnek átlója. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.



3. ábra

Megjegyzések. 1. A mondottakból következik, hogy ha egy konvex négyszögben két szemben levő szög egyike sem hegyesszög, akkor mind a négy oldal kisebb a hosszabb átlónál.

2. Megmutatjuk, hogy minden konvex négyszögnek a legkisebb oldala fölé négyzetet rajzolva még ennek az átlója sem nagyobb a hosszabb átlónál.

Legyen továbbra is $ADC\sphericalangle \geq 90^\circ$, válasszuk a betűzést úgy, hogy álljon $DC \geq DA$, mérjük rá a DA szakaszt D-től a DC félegyenesre, és legyen a végpont E. Ekkor $AE \leq AC$, mert az ADE háromszögből, amennyiben E különbözik C-től,

$$AEC\sphericalangle = ADE\sphericalangle + DAE\sphericalangle > ADE\sphericalangle \geq 90^\circ,$$

tehát az AEC háromszögben E-nél tompaszög van, $AC > AE$. Ha $ADE\sphericalangle = 90^\circ$, akkor AE az említett négyzet-átló, s így állításunk helyes. Ha $ADE\sphericalangle > 90^\circ$, akkor állítsunk merőlegest D-ben AD-re és mérjük fel erre a $DF = DA$ szakaszt, azon az oldalon, amelyen a négyszög fekszik. Így $DF = DE$, tehát D rajta van az EF szakasz felező merőlegesén. A pedig e merőlegesnek F-et tartalmazó partján van, mert a felező merőlegesből D körüli, hegyessszögű forgással jutunk DF-be (ti. akkorával mint DE-be), onnan tovább 90°-os forgással DA-ba, és a két forgás összege kisebb 180°-nál. Ez esetben AF, a kérdéses négyzetátló, kisebb AE-nél. Ha pedig E egybeesik C-vel, akkor $AF \leq AE = AC$. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Pythagorász tételéből tudjuk, hogy az AD oldalú négyzet átlójának hossza $AD\sqrt{2}$. Eszerint konvex négyszög két, tompaszöget vagy derékszöget bezáró oldala közül a kisebbik $\sqrt{2}$-szöröse kisebb valamelyik átlónál vagy egyenlő vele. [1]

IV. megoldás. Az átlók M metszéspontja mindegyik átlót két részre osztja (2. ábra). Válasszuk a betűzést úgy, hogy DM a négy szakasz legnagyobbika legyen, vagy a legnagyobbak egyike. Ekkor

$$AB < AM + BM \leq DM + BM = BD,$$

tehát van olyan oldal, amelyik kisebb egy átlónál, s így a legkisebb oldal bizonyosan kisebb a nagyobbik átlónál.

Megjegyzések. 1. A választott jelölések mellett fennáll

$$BC < BM + CM \leq BM + DM = BD$$

is, tehát *konvex négyszögnek mindig van két szomszédos oldala, amelyek rövidebbek a közös végpontjukból induló átlónál.*

2. Kiindulhatunk a legkisebb átlórészből is. Ha pl. AM nem nagyobb a BM, CM, DM szakaszok egyikénél sem, akkor

$$AB < AM + BM \leq BM + DM = BD$$

és

$$AD < AM + DM \leq BM + DM = BD.$$

Így azt kaptuk, hogy *konvex négyszögben mindig van két szomszédos oldal, amelyek kisebbek a velük háromszöget alkotó átlónál.*

A két oldalpár közös végpontjai csak akkor lehetnek szemközti csúcsok, ha ugyanaz a szakasz szerepel a legrövidebbek közt és a leghosszabbak közt is, vagyis ha M a két átlót csupa egyenlő részekre osztja (téglalap esetén). Ekkor bármelyik szomszédos oldalpár rendelkezik mindkét tulajdonsággal. Egyébként vagy mindkét állítás ugyanarról az oldalpárról szól, vagy ugyanarról az átlóról (és a szóban forgó két oldal közül egy oldal kétszer nyer említést).

A két állításból így az is következik, hogy *egy konvex négyszögnek vagy van két szomszédos oldala, amelyek mindegyike kisebb mindkét átlónál, vagy három oldala kisebb a hosszabb átlónál.*

[1] Lásd az 1961. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 1. feladatát, K. M. L. 24 (1962) 98. o.