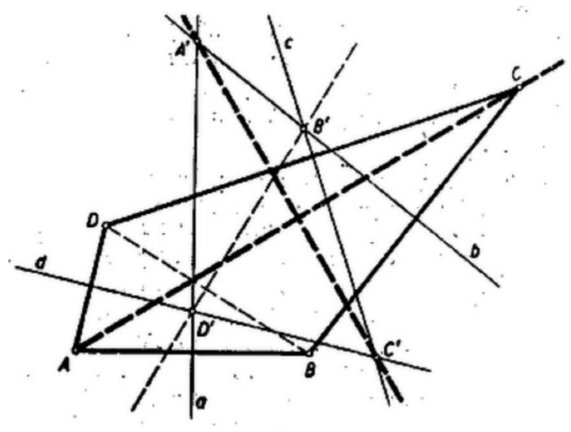
3. feladat. *Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak felező merőlegesei legyenek rendre „a”, b, c és d; az ab, bc, cd és da egyenesek metszéspontjait pedig jelöljük A', B', C', D'-vel. Mutassuk ki, hogy ha az „a”, b, c és d egyenesek metszik egymást, és nem egy ponton mennek át, akkor az $A'C'$ és $B'D'$ egyenesek merőlegesek az eredeti négyszög átlóira.*

Megoldás. Az a, b, c és d oldalfelező merőlegesek közül már három sem mehet át egy ponton. Ha ugyanis három egy ponton menne át, akkor ez a metszéspont egyenlő távol lenne az A, B, C és D pontok mindegyikétől, ezért a negyedik oldal felező merőlegese is átmenne rajta. Ezt az esetet pedig a feladat kizárja. Az A', B', C' és D' tehát négy különböző pont.



Az A' pont az ABC háromszög AB és BC oldalai felező merőlegesének metszéspontja, ezért az AC oldal felező merőlegese is átmegy rajta. Ugyanígy C' az ADC háromszög CD és DA oldalai felező merőlegesének metszéspontja, tehát rajta van az AC oldal felező merőlegesén is. E két háromszög közös AC oldala az eredeti négyszögnek egyik átlója, tehát az A' és C' pontok által meghatározott egyenes éppen az AC átló felező merőlegese.

Ugyanígy adódik – az A, B, C, D betűk szerepét rendre B, C, D, A-nak adva át –, hogy a $B'D'$ egyenes a BD átló felező merőlegese.

Ezzel a feladat állításánál többet mutattunk meg: az $A'C'$ és $B'D'$ egyenesek nemcsak merőlegesek az $ABCD$ négyszög átlóira, hanem felezik is azokat.