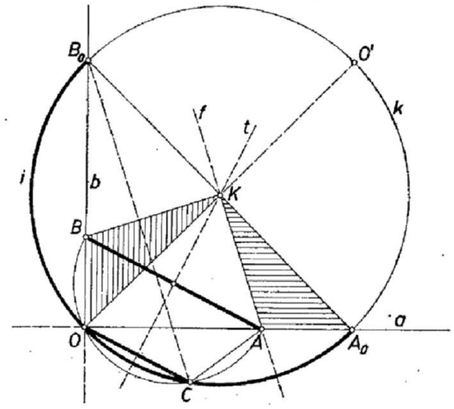
Mérjük rá a és b-re O-tól az állandó $AO+OB$ szakaszt és jelöljük a végpontot A_0, ill. B_0-lal. O, A_0 és B_0 tágabb értelemben hozzátartozik a keresett mértani helyhez. Ha ugyanis $AO=OB=OA_0/2$, akkor az AB-vel O-n át húzott párhuzamos érinti az AB átmérőjű kört, így C gyanánt csak maga O vehető.



Ha pedig A az A_0 határhelyzetbe, és ezért B az O-ba kerül, akkor AB átmegy O-n, és így C egybeesik A_0-lal. Ugyanígy $A\equiv O$, $B\equiv B_0$ esetén $C\equiv B_0$. Néhány további C-pont megszerkesztése után a szemlélet azt a sejtést adja, hogy a keresett mértani hely az A_0B_0 átmérő fölötti, O-n átmenő i félkör, más szóval az A_0B_0O egyenlő szárú derékszögű háromszög köré írt k körnek az O-t tartalmazó $A_0B_0=i$ íve. Bebizonyítjuk, hogy A_0B_0 felezőpontját K-val jelölve mindig fennáll $KC=KA_0=KO$.

Szerkesztésünk szerint $BO+OA=OA_0=OA+AA_0$, tehát $BO=AA_0$; másrészt $KO=KA_0$ és $KOB\sphericalangle=KA_0A\sphericalangle=45^\circ$, így a KOB és KA_0A háromszögek egybevágók. Ezért $KB=KA$, vagyis AB-nek t felező merőlegese az AB minden helyzetében átmegy K-n. Ámde t egyszersmind az $ACOB$ húrtrapéz szimmetriatengelye, tehát OC-t is merőlegesen felezi, és így valóban $KC=KO=KA_0$. Eszerint a mértani hely minden pontja k-n van.

Megmutatjuk másrészt, hogy az i ív minden C^* pontja hozzátartozik a keresett mértani helyhez. Messe a C^*A_0 húr f felező merőlegese a-t A^*-ban, forgassuk el a KA_0A^* háromszöget K körül úgy, hogy A_0 az O-ba jusson, és legyen ekkor A^* új helyzete B^*. Megmutatjuk, hogy az A^*, B^* pontokhoz a feladat feltételei szerint C^* tartozik hozzá. [1]

A használt forgatás szöge $A_0KO\sphericalangle=90^\circ$, ezért az a-n levő A_0A^* oldal új OB^* helyzete merőleges a-ra, tehát B^* a b-n van. Továbbá $OB^*=A_0A^*$, tehát $OA^*+OB^*=OA^*+A^*A_0=OA_0$, az előírt állandó. – Másrészt f átmegy K-n, így a KA^*C^* háromszög az f-re vett tükörképe KA^*A_0-nak, az utóbbi pedig azonos körüljárással egybevágó KB^*O-val, tehát KA^*C^* és KB^*O ellentétes körüljárással egybevágók. És mivel K csúcsuk közös, azért van olyan t^* tengely, amelyre tükrözve egymásba mennek át. Tehát A^*B^* és C^*O párhuzamosak (merőlegesek t^*-ra), és az A^*B^*, C^*, O pontok egy szimmetrikus trapéz csúcsai. Végül $A^*OB^*\sphericalangle=90^\circ$, ezért O, és vele C^* is rajta van az A^*B^* átmérőjű körön. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Amíg C az O-t tartalmazó $A_0B_0=i$ íven van, addig $A_0KA\sphericalangle=A_0KC\sphericalangle/2=A_0B_0C\sphericalangle<90^\circ=A_0KO\sphericalangle$, tehát A az A_0O szakaszon, az a félegyenesen van, és ennélfogva B a b-nek pontja. Ha viszont C-t a k-nak az A_0OB_0 szögtartományba eső ívén vennénk, akkor a CO-val párhuzamos egyenesek vagy csak a-t, vagy csak b-t metszenék, így nem lehetséges a C-t előállító A, B pontpár.

Mindezek szerint a C pontok mértani helye valóban az A_0OB_0 félkörív.

Megjegyzés. Ha megengedjük, hogy A túlmehessen az A_0 határhelyzeten, akkor $AO+OB$ állandósága csak negatív OB-vel maradhat fenn. Ennek a b félegyenes O-n túli meghosszabbításán levő B pontot feleltetve meg, a fentiekhez hasonlóan belátható, hogy C mértani helye az OB_0 negyedkörnek K-ra vett $O'A_0$ tükörképe (az O' pont kivételével, mert így mindig fennáll $|OB|<OA$, tehát AB és OC az a-val 45°-nál kisebb szöget zár be). Ha pedig B halad túl B_0-on és A az a félegyenes O-n túli meghosszabbításán van, akkor C mértani helye az $O'B_0$ negyedív (O'-t kizárva). Ezek szerint előjellel vett OA, OB távolságokat tekintve C mértani helye a k kör az O' pont kivételével.

[1] Az ábrán a *-okat nem tüntettük fel.