I. megoldás. A bizonyítandó állítást így is fogalmazhatjuk: nincs olyan többjegyű négyzetszám, amelynek minden jegye megegyezik.

Megjegyezzük, hogy ha egy szám elé nullákat írunk, értéke nem változik, de ezeket a nullákat a jegyek számának megállapításakor nem vesszük tekintetbe. Pl. 05 nem kétjegyű, hanem egyjegyű szám. Így a több 0-val írt $000\ldots0$ számok teljes négyzetek, de ezeket nem tekintjük többjegyűnek.

Ezek után a következő alakú számokról kell bebizonyítanunk, hogy nem lehet köztük négyzetszám:

$$\begin{array}{ccc} 1\ldots1, & 4\ldots4, & 7\ldots7, \\ 2\ldots2, & 5\ldots5, & 8\ldots8, \\ 3\ldots3, & 6\ldots6, & 9\ldots9, \end{array}$$

akárhány – a szélsőkkel megegyező – jegyet képzeljünk is a pontok helyére. (Az „akárhány" szó itt nullát is jelenthet, vagyis azt, hogy a pontokat kihagyva a két szélső számjegyből alkotunk számot.) Közülük négyet mindjárt kizárhatunk, mert 2-re, 3-ra, 7-re és 8-ra nem végződhet négyzetszám. Az egyjegyű számok négyzetéről ezt a lehetséges esetek végignézésével azonnal megállapíthatjuk:

$$\begin{array}{ccccc} 0^2 = 0, & 1^2 = 1, & 2^2 = 4, & 3^2 = 9, & 4^2 = 16, \\ 5^2 = 25, & 6^2 = 36, & 7^2 = 49, & 8^2 = 64, & 9^2 = 81. \end{array}$$

Többjegyű számok négyzetére pedig azért igaz ez az állítás, mert csak az utolsó jegyüktől függ, hogy mi lesz a négyzetüknek az utolsó jegye.

Általánosabban: két szám szorzatának utolsó jegye csak a számok utolsó jegyétől függ. Ezt könnyen beláthatjuk, ha a szorzás szokásos elvégzési módjára gondolunk, például

$$\begin{array}{r} 27\cdot42 \\ \overline{54} \\ 108 \\ \hline 1134 \end{array}$$

Az utolsó jeggyel végzett szorzás részletszorzatának utolsó jegyéhez már nem adunk semmit, ez lesz a szorzat utolsó jegye.

Az egyjegyű számok négyzetét megfigyelve még egy megállapítást tehetünk: a páratlan egyjegyű számok négyzetének tizese páros (a fenti felsorolásban: 0, 0, 2, 4, 8). Számpéldák azt mutatják, hogy ez érvényes többjegyű számokra is. Ha ez mindig így van, akkor a csupa 1, 5, 9-ből álló számok sem lehetnek négyzetszámok, hiszen utolsó előtti jegyük páratlan.

Bebizonyítjuk, hogy minden többjegyű páratlan szám négyzetének utolsó előtti jegye páros. Ezt beláthatjuk a négyzetreemelés bármelyik szokásos eljárása alapján, vagy algebrailag a következő módon. Jelöljük a szám utolsó jegyét a-val, az utolsó jegy elhagyásával visszamaradó számot $10\ A$-val. Ekkor

$$(10A + a)^2 \equiv 100A^2 + 20Aa + a^2,$$

és itt az első tag nem befolyásolja a négyzetszám tízesét, a második tag páros jeggyel járul hozzá, és ha a páratlan, akkor a harmadik tag is páros jeggyel járul hozzá, mint arról az esetek végignézésével már az előbb meggyőződtünk.

Most már csak a $4\ldots4$ és $6\ldots6$ alakú számokról kell bebizonyítanunk, hogy nem lehetnek négyzetszámok. Ezek páros számok, tehát mindegyikük csak páros számnak lehetne a négyzete. A $6\ldots6$ szám nem lehet négyzetszám, mert páros szám négyzete 4-gyel is osztható: $(2c)^2 = 4c^2$, viszont $6\ldots6 = 6\cdot1\ldots1$ páros, de 4-gyel nem osztható.

Azt is látjuk, hogy páros szám négyzetének a negyedrésze is négyzetszám (c^2), viszont $4\ldots4 = 4\cdot1\ldots1$, és itt a második tényező egy legalább két 1-esből álló szám, az ilyenekről pedig már beláttuk, hogy nem lehetnek négyzetszámok.

Minden esetet végignéztünk, s így bebizonyítottuk, hogy többjegyű négyzetszám nem állhat egyező jegyekből, mindig van benne legalább két különböző számjegy.

II. megoldás. Láttuk, hogy egész számok négyzetének (általánosan: egész számok szorzatának) utolsó jegye csak az alap (a tényezők) utolsó jegyétől függ. Hasonlóan belátható, hogy a szorzat utolsó két jegye is csak a tényezők utolsó két jegyétől függ.

Ezt is bebizonyíthatjuk akár a szorzási eljárás elemzése alapján, akár algebrai jelöléssel. Lássuk az utóbbit. Jelentse a és b a szóban forgó tényezők utolsó két jegyéből álló számot, A és B az elhagyásuk után visszamaradt számot. Akkor maguk a tényezők $100A + a$ és $100B + b$, szorzatuk pedig $10\ 000AB + 100Ab + 100aB + ab$. Az első három tag nem befolyásolja a szorzat utolsó két jegyét, hiszen mindegyiknek a végén legalább két 0 van. Tehát a szorzat utolsó két jegye – mint állítottuk – megegyezik a tényezők utolsó két jegyéből álló számok (a és b) szorzatának utolsó két jegyével.

Ha tehát meg akarjuk állapítani, hogy mi lehet egy négyzetszám utolsó két jegye, elég végignéznünk az egy- és kétjegyű számok négyzetének utolsó két jegyét. Célszerű ehhez elővenni a Négyjegyű Függvénytáblázatot, amelyet a versenyzők – mint általában bármely könyvet – szabadon használhattak. Megállapíthatjuk, hogy egyező jegyekként csak 00 és 44 fordul elő az utolsó két helyen. (Megjegyezzük, hogy a vizsgálandó négyzetszámok legfeljebb négy jegyűek, így a táblázat a kerekítés nélküli, pontos értéküket közli.) Egy csupa 0-ból álló számot nem tekintünk többjegyűnek. Ha volna csupa 4-esből álló többjegyű négyzetszám, akkor volna csupa 1-esből álló is, amint azt az I. megoldásban beláttuk. Ilyen azonban nincs, hiszen az utolsó két jegy nem lehet 11, tehát csupa 4-esből álló négyzetszám sem fordulhat elő. A többjegyű négyzetszámokban tehát csakugyan kell lennie legalább két különböző jegynek.

Megjegyzés. A $0, 1, \ldots, 99$ számok négyzete helyett elég csak a $0, 1, \ldots, 25$ számok négyzetét végignézni, mert 25-ön túl új kétjegyű végződés nem lép fel. Egyrészt ugyanis $(50-a)^2$-nek ugyanaz az utolsó két jegye, mint a^2-nek, hiszen különbségük, $2500-100a$, 100-nak többszöröse, és ha $0 \leq a \leq 25$, akkor $25 \leq 50-a \leq 50$; másrészt $(b+50)^2$-nek hasonló okból ugyanaz az utolsó két jegye, mint b^2-nek, és ha b 0-tól 50-ig változik, akkor $50+b$ végigfut 50-től 100-ig a számokon.