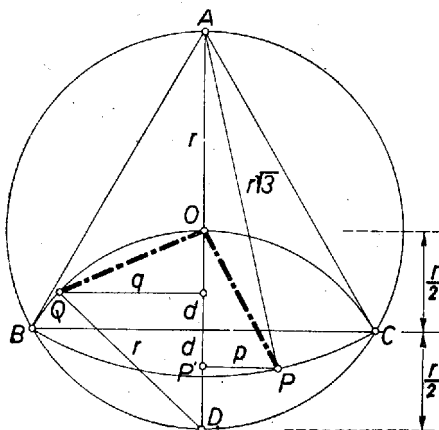


Legyen  $P$ , ill.  $Q$  vetülete az  $AD$  átmérőn  $P'$ , ill.  $Q'$ , és jelöljük a háromszög köré írt kör sugarát  $r$ -rel. Így a  $D$  középpontú  $BC$  körív sugara szintén  $r$ , a háromszög oldalának és az  $A$  középpontú  $BC$  körív sugarának hossza pedig  $AB = r\sqrt{3}$ .  $P$  és  $Q$ -nak  $BC$ -től mért (egyenlő) távolságát jelöljük  $d$ -vel, míg  $AD$ -től mért távolságuk legyen  $PP' = p$  és  $QQ' = q$ .



Kifejezzük  $OP$  és  $OQ$  hosszát  $r$ -rel és  $d$ -vel és az így nyert kifejezéseket összehasonlítjuk. Az  $OPP'$  és az  $APP'$  derékszögű háromszögből

$$OP^2 = \left(\frac{r}{2} + d\right)^2 + p^2, \quad p^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3r}{2} + d\right)^2,$$

és így

$$OP^2 = 3r^2 + \left(\frac{r}{2} + d\right)^2 - \left(\frac{3r}{2} + d\right)^2 = 3r^2 - r(2r + 2d) = r(r - 2d).$$

Hasonlóan az  $OQQ'$  és a  $DQQ'$  derékszögű háromszögből

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \left(\frac{r}{2} - d\right)^2 + q^2, \\ q^2 &= r^2 - \left(\frac{r}{2} + d\right)^2, \end{aligned}$$

és így

$$OQ^2 = r(r - 2d) = OP^2.$$

Miután  $OP$  és  $OQ$  értelemszerűen pozitívak, eredményünk a feladat állítását bizonyítja.

*Megjegyzés.* Ha  $P$  és  $Q$  mindegyikét a felhasznált köröknek a félkörnél nagyobb ívén vesszük fel a  $BC$  egyenestől egyenlő távolságban, akkor hasonló számítással ismét azt nyerjük, hogy  $P$  és  $Q$  egyenlő távolságra van  $O$ -tól is.