I. megoldás: Jelöljük a háromszög befogóit a és b-vel, átfogóját c-vel. Feltehetjük, hogy $a < b$, ugyanis az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek nem lehet mind a három oldala egész szám. Pythagorász tétele szerint

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

a feladat követelménye szerint pedig

$$ab = 3(a + b + c). \tag{2}$$

Meg kell határoznunk az (1), (2) egyenletrendszer pozitív egész megoldásait, azaz meg kell oldanunk ezen diophantoszi egyenletrendszert. Ebben eljárhatunk úgy, hogy kiküszöböljük c-t, így egyetlen, az a és b-ben szimmetrikus diophantoszi egyenletre jutunk – ugyanis (1) és (2) mindegyike a és b-ben szimmetrikus –, ezt megoldjuk, majd a megoldások közül kiválasztjuk azokat, amelyekhez (1) vagy (2) szerint tartozó c szintén egész szám.

(2)-ből

$$c = \frac{ab}{3} - a - b, \tag{2a}$$

ezt (1)-be helyettesítve, a törtek eltávolításával

$$9(a^2 + b^2) = a^2b^2 + 9a^2 + 9b^2 - 6a^2b - 6ab^2 + 18ab,$$

majd rendezés után ab-vel végigosztva (ugyanis a, $b \neq 0$) az egyenletet így alakíthatjuk:

$$(a - 6)(b - 6) = 18. \tag{3}$$

a és b-vel együtt a bal oldal tényezői egészek. A jobb oldali szám hatféleképpen bontható fel két egész szám szorzatára:

$$1 \cdot 18, \quad 2 \cdot 9, \quad 3 \cdot 6, \quad \text{továbbá} \quad (-1) \cdot (-18), \quad (-2) \cdot (-9), \quad (-3) \cdot (-6).$$

Mivel azonban a és b pozitívok, tehát $a - 6$ és $b - 6$ mindegyike nagyobb -6-nál, és ezt a követelményt 18 negatív egész tényező párjai közül egyik sem teljesíti egyidejűleg mindkét tényezőre, azért csak a pozitív tényezőkre bontások felelnek meg. Ezek szerint (3)-nak három megoldása van:

$$\begin{aligned} a - 6 &= 1, \quad 2, \quad 3, \\ \text{és } b - 6 &= 18, \quad 9, \quad 6\text{-ból}: \\ a &= 7, \quad 8, \quad 9, \\ \text{és } b &= 24, \quad 15, \quad 12. \end{aligned}$$

Mivel 18-cal együtt az $a - 6$ és $b - 6$ tényezőknek legalább az egyike osztható 3-mal, azért ugyanez áll a 6-tal nagyobb a és b-re és következésképpen szorzatukra is, ennélfogva a $(2a)$-ból kiszámítható c mindhárom esetben egész szám:

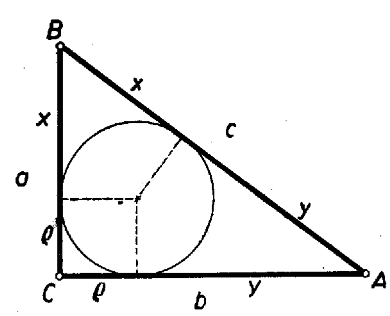
$$c \quad = 25, \quad 17, \quad 15.$$

Ezek szerint a követelményeknek három háromszög felel meg.

Megjegyzés. Néhány versenyző indokolatlanul feltételezte, hogy a keresett háromszög oldalainak aránya 3 : 4 : 5. Miután a megoldások között ilyen is van, így véletlenül ebből az alaptalan feltevésből is rá lehetett jutni egy megoldásra, de nem mindre.

II. megoldás: Ismeretes, hogy minden háromszög területe $t = \varrho \cdot s$ alakban írható, ahol ϱ a háromszög beírt körének sugara, és s a háromszög félkerülete. Így a keresett háromszögre nézve $2\varrho s = 3 \cdot 2s$, és innen, mivel s nem lehet 0, $\varrho = 3$, egész szám.

A beírt kör érintési pontjai az oldalakat úgy osztják két-két részre, hogy a csúcsokban összefutó részek páronként egyenlők. A derékszög csúcsában összefutó két rész hossza ϱ, mert e részek és a végpontjaikhoz tartozó sugarak által alkotott négyszögben három derékszög van, és két szomszédos oldal egyenlő, tehát az idom négyzet. Eszerint, az átfogó két szakaszát x, y-nal jelölve az oldalak rendre: $a = \varrho + x = 3 + x$, $b = \varrho + y = 3 + y$, $c = x + y$ tehát $x = a - 3$, $y = b - 3$ egész számok.



Pythagorász tételével

$$(3+x)^2+(3+y)^2=(x+y)^2,$$

ezt az egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$$(x-3)(y-3)=18. \tag{4}$$

Eszerint ismét 18 egész tényező párokra bontásai vezetnek megoldáshoz. A beírt kör középpontja, a befogókon levő érintési pontok és az átfogó végpontjai által meghatározott derékszögű háromszögekből látható, hogy az x, y befogók nagyobbak ϱ-nál, mert velük szemben nagyobb szög fekszik. Ugyanis e háromszögek ϱ-val szemben fekvő szögei fele akkorák, mint az eredeti háromszög hegyes szögei, tehát kisebbek $45°$-nál. Eszerint $x,\ y>\varrho=3$, így $x-3$, $y-3$ pozitívok és $a<b$-re tekintettel $x-3<y-3$. Így 18-nak ismét csak a pozitív tényezőkre való felbontásai jönnek szóba:

$$\begin{aligned}
x-3 &= \ 1, \quad 2, \quad 3,\\
\text{és } y-3 &= 18, \quad 9, \quad 6\text{-ból},\\
a=x+3=(x-3)+6 &= \ 7, \quad 8, \quad 9,\\
b=y+3=(y-3)+6 &= 24, \quad 15, \quad 12,\\
c=x+y=(x-3)+(y-3)+6 &= 25, \quad 17, \quad 15,
\end{aligned}$$

ismét az I. megoldásban nyert háromszögekre jutottunk.

Megjegyzés. A kitűzött feladat speciális esete a következő feladatnak: *Egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszámai egész számok. A háromszög területe mértékszámának kétszerese egyenlő a kerület mértékszámának ϱ-szorosával, ahol ϱ adott pozitív egész szám. Mekkorák a háromszög oldalai?* (Esetünkben $\varrho=3$ volt.) A követelmény szerint a $2t:2s$ arány értéke ϱ, az ezzel egyenlő $t:s$ arány viszont – mint láttuk – a beírt kör sugarát adja meg, ennélfogva a ϱ szám minden megoldásban a beírt kör sugarának mértékszáma. Ebből a II. megoldás gondolatmenetével (4) helyett az

$$(x-\varrho)(y-\varrho)=2\varrho^2 \qquad x,\ y>\varrho \tag{5}$$

diophantoszi egyenletre jutunk. Ebből annyi megoldást nyerünk, ahányféleképpen $2\varrho^2$-et két pozitív egész tényező szorzatára lehet bontani, ugyanis ϱ, $x-\varrho$, $y-\varrho$-val együtt x, y, $a=x+\varrho$, $b=y+\varrho$ és $c=x+y$ szintén egész számok.

Érdekes, hogy ϱ minden értéke mellett van olyan megoldás, melyben az oldalak aránya $3:4:5$. Erre vezet ugyanis $2\varrho^2$-nek $\varrho\cdot 2\varrho$ alakú felbontása: $x-\varrho=\varrho$, $y-\varrho=2\varrho$-ból $x=2\varrho$, $y=3\varrho$ és $a=3\varrho$, $b=4\varrho$, $c=5\varrho$.

III. megoldás: Ismeretes, hogy az (1) pythagoraszi egyenletet kielégítő a, b, c egész számhármasokat pythagoraszi számhármasoknak szokás nevezni. Az ilyeneknek minden λa, λb, λc többszöröse – ha λ pozitív egész szám – ugyancsak pythagoraszi számhármas. Ha a és b relatív prímek, akkor c és a, továbbá c és b szintén relatív prímek, ilyen esetben a, b, c-t alaphármasnak nevezzük. Ismeretes az is, hogy minden alaphármas kifejezhető két u, v paraméterrel a következőképpen:

$$a=u\cdot v, \qquad b=\frac{u^2-v^2}{2}, \qquad c=\frac{u^2+v^2}{2}, \tag{6}$$

ahol u és v pozitív egész, páratlan relatív prim számok. [1] Ezekkel minden pythagoraszi számhármas így írható:

$$a=\lambda\cdot u\cdot v, \quad b=\lambda\cdot\frac{u^2-v^2}{2}, \quad c=\lambda\cdot\frac{u^2+v^2}{2}, \tag{7}$$

ugyanis minden pythagoraszi számhármas valamely alaphármas többszöröse.

Feladatunk most már a (7) közül kiválasztani a (2)-nek eleget tevő számhármasokat. (Az $a<b$ követelményt a továbbiakban természetesen nem tarthatjuk fenn, mert a és b kifejezése lényegesen különböző.) E kifejezéseket (2)-be beírva $b+c=\lambda u^2$ alapján a

$$\lambda^2uv(u-v)(u+v)=6\lambda u(v+u)$$

egyenletre jutunk. Ezt λ-val, u-val és $u+v$-vel oszthatjuk, mert egyikük se 0:

$$\lambda v(u-v)=6.$$

[1] Hasonló, még ismertebb kifejezések a következők:

$$a=u^2-v^2, \quad b=2uv, \quad c=u^2+v^2,$$

ahol u, v relatív prim pozitív egész számok, $u>v$, egyikük páros, másikuk páratlan. Ezt lásd pl: *Rademacher–Toeplitz:* Számokról és alakzatokról, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, 1954. 84. o.

A bal oldal tényezői közül v páratlan, $u-v$ páros, és λ tetszőleges pozitív egész. Másrészt $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, így a tényezők megfeleltetésére a következő lehetőségek vannak:

$$\begin{array}{rccc} v = & \multicolumn{2}{c}{1,} & 3, \\ u - v = & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{2, \qquad\qquad 6,}} & 2, \end{array}$$

ekkor

$$\begin{array}{rccc} \lambda = & 3, & 1, & 1, \end{array}$$

és

$$\begin{array}{rccc} u = & 3, & 7, & 5, \end{array}$$

ennélfogva (7) szerint

$$\begin{array}{rccc} a = & 9, & 7, & 15, \\ b = & 12, & 24, & 8, \\ c = & 15, & 25, & 17, \end{array}$$

Ismét az előzők során nyert háromszögekhez jutottunk. Látjuk továbbá a $\lambda = 1$ értékből, hogy a második és a harmadik megoldás alaphármas. Valóban, a 7, 24, 25 és a 15, 8, 17 számok páronként relatív prímek, az első hármas viszont $\lambda = 3$-szorosa a 3, 4, 5 alaphármasnak.