Néhány esetben az állítást könnyen igazolni tudjuk úgy, hogy elvégezzük a négyzetre emelést (akár csak szorzással is), az eredményt „kettévágjuk”, és mindkét részéből négyzetgyököt vonunk. Például:

$$\begin{aligned} 41^2 &= 1\,681, & 16 &= 4^2, & 81 &= 9^2,\\ 4\,901^2 &= 24\,019\,801, & 2\,401 &= 49^2, & 9\,801 &= 99^2,\\ 499\,001^2 &= 249\,001\,998\,001, & 249\,001 &= 499^2, & 998\,001 &= 999^2. \end{aligned}$$

A feladat állítása tehát azokban az esetekben, amikor egy vagy két 9-et és 0-t iktattunk közbe, helyes. Ezekből az esetekből úgy sejtjük, hogy a szóban forgó számok négyzetének két része nemcsak *négyzetszám*, (ami a feladat egyik állítása), hanem pontosan az első rész éppen *a szóban forgó számok első felének négyzete*, második részük pedig *az eggyel több* 9*-esből álló szám négyzete, mint ahány* 9*-est közbeiktattunk.*

Így van-e ez mindig?

Képzeljük el, hogy n darab 9-est és utána n darab 0-t iktattunk a 4 és az 1 közé, ahol n *bármely* természetes szám. Így

$$\underbrace{49\ldots9}_{n+1\text{ jegy}}\underbrace{0\ldots01}_{n+1\text{ jegy}}{}^2=(\underbrace{49\ldots9}_{n+1\text{ jegy}}\underbrace{0\ldots0}_{n+1\text{ jegy}}+1)^2=\underbrace{49\ldots9}_{n+1\text{ jegy}}\underbrace{0\ldots0}_{n+1\text{ jegy}}{}^2+2\cdot\underbrace{49\ldots9}_{n+1\text{ jegy}}\underbrace{0\ldots0}_{n+1\text{ jegy}}+1.$$

Az összeg első tagjáról láthatjuk, hogy $2n+2$ darab 0-ra végződik, és ezek előtt is van $2n+2$ jegy, amelyek egybeolvasva éppen $49\ldots9$-nek a négyzetét adják. A megmaradó kéttagú összegről be akarjuk látni, hogy $(10^{n+1}-1)^2$-nel egyenlő. Ebből az is következni fog, hogy ez a szám csak $2n+2$ jegyű (hiszen az első $2n+3$ jegyű szám 10^{n+1}-nek a négyzete, 10^{2n+2}), *tehát nem nyúlik bele az előtte levő számba.* A feladat megoldásához tehát csak annak igazolása hiányzik, hogy

$$(10^{n+1}-1)^2=2\cdot\underbrace{49\ldots9}_{n+1\text{ jegy}}\underbrace{0\ldots0}_{n+1\text{ jegy}}+1.$$

A jobb oldalon álló számot így írhatjuk:

$$2(5\cdot10^n-1)\cdot10^{n+1}+1,$$

vagyis

$$10\cdot10^n\cdot10^{n+1}-2\cdot10^{n+1}+1,$$

azaz

$$10^{2n+2}-2\cdot10^{n+1}+1.$$

Ez pedig csakugyan egyenlő a bal oldali számmal.

Megjegyzés. A bizonyítást persze úgy is végezhettük volna, ha mindjárt az elején felírjuk algebrai alakban az n darab 9-es és n darab 0 közbeiktatásával kapott szám négyzetét:

$$[(5\cdot10^n-1)\cdot10^{n+1}+1]^2,$$

elvégezzük a négyzetre emelést:

$$(5\cdot10^n-1)^2\cdot10^{2n+2}+2(5\cdot10^n-1)10^{n+1}+1,$$

az összeg első tagjáról megállapítjuk, hogy négyzetszám, $(5\cdot10^n-1)\cdot10n+1$-nek a négyzete, és a végén $2n+2$ darab 0 van, a másik két tag összegéről pedig – úgy mint az előbb – megállapítjuk, hogy szintén négyzetszám, $10^{n+1}-1$-nek a négyzete, és mivel $2n+2$ jegyből áll, nem nyúlik bele az előtte álló négyzetszámba, jegyei csak a 0-kkal adódnak össze. A bizonyítás általánossága azonban az előbb elmondott formában sem szenvedett csorbát, a kevesebb algebrai jelölés mögött jobban el lehet képzelni magukat a tízes számrendszerben felírt számokat.