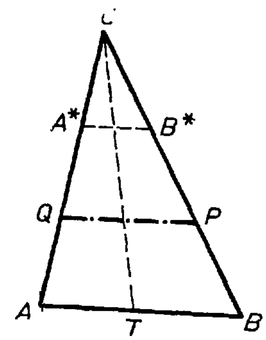
I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak és legyen a keresett, AB-vel párhuzamos egyenesnek BC-vel, ill. AC-vel alkotott metszéspontja P, ill. Q. A PQ szakasz a kis háromszög és a trapéz kerületének egyaránt része, ezért a kerületek egyenlőségére vonatkozó követelmény így is írható:

(1) $$PC + CQ = PB + BA + AQ,$$

és így $PC + CQ$ egyenlő az ABC háromszög kerületének felével.



Másrészt mivel QP párhuzamos AB-vel, azért a CPQ és CBA háromszögek hasonlók, és így

(2) $$PC : CQ = BC : CA.$$

Ezek alapján először $k/2 = (AB + BC + CA)/2$ hosszúságú egyenesszakaszt szerkesztünk, majd ezt $BC : CA$ arányban kettéosztjuk, és így nyerjük a keresett PC, ill. CQ szakaszt.

Szerkesztésünk helyessége nyilvánvaló; P mindig a BC szakaszon adódik, mert $PC + CQ = k/2$ a háromszög-egyenlőtlenség folytán kisebb $BC + CA$-nál.

II. megoldás: Tükrözzük A-t a Q, B-t a P pontra nézve, így nyerjük az A^*, B^* pontokat. (1)-ből az így létrejött további egyenlő darabokat elhagyva

$$B^*C + CA^* = BA.$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy A^*B^* párhuzamos AB-vel, amiből következik, hogy

$$B^*C : CA^* = BC : CA.$$

Eszerint az AB oldalt a BC és CA oldalak arányában osztva nyerjük a B^*C és CA^* szakaszokat, a keresett P, Q pont pedig a BB^*, AA^* szakasz felezőpontja.

Megjegyzések: 1. Itt az I. megoldáshoz képest azt nyertük, hogy a felosztandó szakaszt nem kell szerkesztenünk. A felosztás igen egyszerűen adódik az ACB szög CT felezőjével.

2. A feladat általánosítható: előírhatjuk, hogy a kis háromszög és a trapéz kerületei egyenlőség helyett adott λ ($\lambda \neq 1, \lambda > 0$) arányban álljanak:

(3) $$PC + CQ + QP = \lambda(PB + BA + AQ + QP),$$

(ahol λ-t úgy tekintjük adottnak, hogy ismerjük az egységnyi hosszúságú és a λ hosszúságú szakaszt). Előírhatjuk azt is, hogy az (1) két oldalán álló összegek aránya legyen egy adott μ érték:

(4) $$PC + CQ = \mu(PB + BA + AQ).$$

Ezekkel a feladat így hangzik: Adott az ABC háromszög. Szerkesszük meg a BC oldalon a P, és az AC oldalon a Q pontot úgy, hogy PQ párhuzamos legyen BA-val és teljesüljön (3), ill. (4).

Tekintsük előbb a (4) követelmény esetét. Adjunk (4) mindkét oldalához $\mu(PC + CQ)$-t, így

$$(1 + \mu)(PC + CQ) = \mu(BC + BA + AC),$$

másképpen

(4') $$(PC + CQ) : (BC + BA + AC) = \mu : (1 + \mu).$$

Ennek alapján első lépésül a háromszög kerületéhez és a μ, $1 + \mu$ szakaszhoz negyedik arányosként megszerkesztjük $PC + CQ$-t, majd ezt (2)-nek megfelelően két részre osztjuk.

Megoldás létezésének feltétele, hogy $PC + CQ$ kisebbnek adódjék $BC + CA$-nál. Ezt (4') csekély átalakításával úgy is mondhatjuk, hogy a $\mu : 1$ arány értéke kisebb legyen $(BC + CA) : AB$-nél; egyenlőség esetén a P pont B-be, Q pedig A-ba esik, a trapéz elfajul egyenesszakasszá.

A (3) követelmény esetében a $PC = a'$, $QC = b'$, $QP = c'$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ egyszerűbb jelölésekkel a fentemlített hasonlóság alapján $b' = ba'/a$ és $c' = ca'/a$. Ezek alapján (3) így alakítható:

$$a' : a = k : \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}k - 2c\right),$$

amiből a' az előbbi esethez hasonlóan megszerkeszthető.

A megoldhatóság feltétele, hogy a' kisebbnek adódjék a-nál, másképpen, hogy – a legutóbbi aránypárból – a $\lambda : 1$ arány értéke kisebb legyen $k : 2c$-nél.

Egybetűs jelölésekkel a (4) követelmény hasonlóan így alakítható:

$$a' : a = k : \frac{1+\mu}{\mu}(k - c).$$