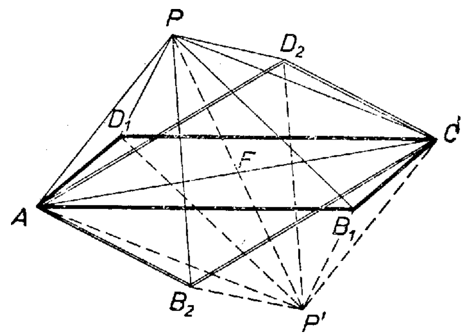
A PAC háromszöget meg tudjuk szerkeszteni, mert ismerjük mind a három oldalát (1. ábra). A B és D pontok kitűzéséhez ismerjük a PBD háromszög PB és PD oldalát, és további adatot ad az a felismerés, hogy az AC és BD átlók F metszéspontja mindkét átlónak felezőpontja. Így a PAC háromszögből kiadódó PF szakasz PBD-nek is súlyvonala.



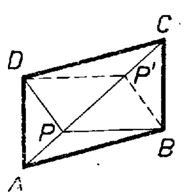
1. ábra

Adatainkból a PBD háromszög megszerkesztése, mint ismeretes, azon alapszik, hogy a háromszöget F-re tükrözve B és D egymás tükörképei lesznek, és P tükörképét P'-vel jelölve a $PBP'D$ négyszög paralelogramma. Eszerint $P'B = PD$ és $P'D = PB$, ennélfogva B-t a P körül PB és P' körül PD sugárral írt körök metszéspontja adja, D pedig a $PBP'D$ paralelogramma negyedik csúcsa lesz.

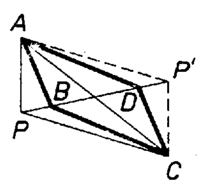
A kapott $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek, mert csúcsai az előírt távolságokra vannak P-től, egyik átlója a kívánt AC hosszúság, végül a négyszög paralelogramma, mert átlói (F-ben) felezik egymást.

Mivel az ábrán F-re A és C, valamint P és P' tükrös párok, azért P' a PAC háromszöget paralelogrammává egészíti ki. Így P'-t F ismerete nélkül is kitűzhetjük. És mivel F-et tovább sem használjuk fel, megszerkesztése mellőzhető. Ezért F-et a diszkusszióban nem említjük.

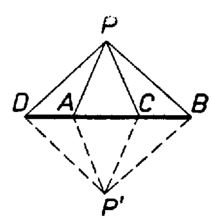
A PAC háromszög és vele az $APCP'$ paralelogramma egyértelműen megszerkeszthető, ha az adott AC, PA és PC szakaszok közül bármelyik kettőnek összege nagyobb a harmadiknál. A $PBP'D$ paralelogramma megszerkeszthető, ha a létrejött PP' és adott PB, PD szakaszok közül bármelyik kettő összege nagyobb, mint a harmadik, éspedig 2 megoldást kapunk, ha $PD \neq PB$, ha pedig $PD = PB$, akkor egyet. Eszerint $ABCD$-re is a megoldások száma 2. Mert bár a $PBP'D$-re adódó két megoldás egybevágó – egymásnak PP'-re tükörképei – a velük adódó $ABCD$ paralelogrammák mégsem egybevágók, mert PP' az $APCP'$ paralelogrammának általában nem tengelye. Ha azonban $PA = PC$, és így $PAP'C$ rombusz, akkor a ($PB \neq PD$ mellett) adódó két $ABCD$ paralelogramma egymásnak PP'-re tükörképe.



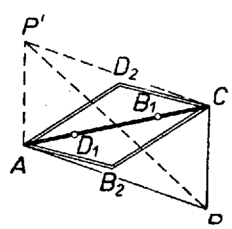
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Eljárásunk akkor is használható, ha vagy az első három, vagy pedig az utóbbi három egyenlőtlenség közül az egyikben egyenlőség teljesül, mert ilyenkor P és P' az AC egyenesre, ill. B és D a PP' egyenesre esnek, de a 4 pont egy egyenesre esése csak egyszer fordul elő (2-3. ábra). Ha mindkét egyenlőtlenséghármas közül egyben-egyben egyenlőség lép fel, akkor mind a hat pont egy egyenesre esik, a paralelogramma elfajul egyenesszakasszá.

Kivétel a legutóbbi megjegyzésünk alól a $PA = PC = AC/2$ eset, amikor C az A pont P-re vonatkozó tükörképének adódik, és így P' egybeesik P-vel, $PP' = 0$. Ilyenkor ugyanis a $PBP'D$ paralelogramma is elfajult és vagy egyáltalán nem szerkeszthető még elfajultan sem, – ha ti. $PD \neq PB$ – vagy végtelen sokféleképpen szerkeszthető – ha $PD = PB$. Ilyenkor tulajdonképpen a két átlójából kellene megszerkeszteni a paralelogrammát.

Megjegyezzük még, hogy az $ABCD$ paralelogramma akkor is adódhat elfajultnak, ha sem az $APCP'$, sem a $PBP'D$ paralelogramma nem elfajult, pl. ha $PA = PC(> AC/2)$ és $PB = PD$ (4. ábra); sőt az egyik megoldás $PA \neq PC$ és $PB \neq PD$ esetén is lehet elfajult (5. ábra).

Megjegyzés: A feladat könnyen visszavezethető egy jól ismert négyszögszerkesztési feladatra. Toljuk el a PCD háromszöget úgy, hogy a CD oldal a vele párhuzamos és egyenlő AB oldalra kerüljön. Az így keletkező $APBP'$ négyszögben adottak az oldalak. Hogy a paralelogramma AC átlóját is kapcsolatba hozzuk ezzel a négyszöggel, figyeljük meg, hogy a $BCPP'$ négyszög paralelogramma, s így BP és CP' átlóinak E metszéspontja mindkét átlót felezi. Így az $APBP'$ négyszög két nem szomszédos oldalának, AP'-nek és BP-nek a felezőpontjait összekötő EF szakasz egyben az ACP' háromszögnek középvonala, tehát AC felével egyenlő, s így adottnak tekinthető. A versenyfeladat tehát ekvivalens a következő ismert feladattal:[1] szerkesszünk négyszöget, ha adott az oldalak hossza és két nem szomszédos oldal felezőpontjának távolsága. A keletkező négyszög adódhat konkávnak vagy hurkoltnak is. (Ezért is kerültük el a „szemközti oldalak" megjelölést.)

[1]Lásd pl. az I. o. gimn. tankönyvben (1959. évi kiadás) a 242. o. 18. feladatában.