I. megoldás: Próbálgatással könnyen kapjuk a következő felbontásokat:

$$
\begin{aligned}
3^3-1^3&=26 &&= 1^2+3^2+4^2=0^2+1^2+5^2,\\
4^3-2^3&=56 &&= 2^2+4^2+6^2,\\
5^3-3^3&=98 &&= 3^2+5^2+8^2=1^2+4^2+9^2=0^2+7^2+7^2,\\
6^3-4^3&=152 &&= 4^2+6^2+10^2=2^2+2^2+12^2,\\
2^3-0^3&=8 &&= 0^2+2^2+2^2,\\
1^3-(-1)^3&=2 &&= (-1)^2+1^2+0^2,\\
(-2)^3-(-4)^3&=56 &&= (-4)^2+(-2)^2+(-6)^2.
\end{aligned}
$$

Észrevesszük, hogy mindegyik különbség elsőnek írt felbontásában az első két négyzetszám alapja az a két szám, amelyek köbeinek különbségét éppen vizsgáljuk, a harmadik négyzetszám alapja pedig az előbbi kettőnek az összege. Ezek alapján azt sejtjük, hogy a vizsgálandó számokat n és $n+2$-vel jelölve bármely n mellett fennáll

$$(n+2)^3-n^3=n^2+(n+2)^2+(2n+2)^2. \tag{1}$$

Sejtésünk bizonyítására a két oldali hatványokat kifejtve mindkét oldalon $6n^2+12n+8$-at kapunk, tehát (1) helyes. Ha n és vele $n+2$ egész szám, akkor összegük is az, tehát a jobb oldal mindhárom tagja négyzetszám. Evvel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések: 1. Kevesebb konkrét próbálgatást végzünk a következő meggondolásban, és nem lesz szükség bizonyításra. Nyilvánvaló, hogy a köbök

$$(n+2)^3-n^3=6n^2+12n+8 \tag{2}$$

különbségében n-et változtatva a négyzetszámok alapjai is változnak, függnek n-től. Tegyük fel, hogy van olyan felbontás, melyben az alapok n-nek elsőfokú függvényei, vagyis ilyen alakúak:

$$an+b, \qquad cn+d, \qquad en+f, \tag{3}$$

ahol a, b, c, d, e, f egész számok. Ezek négyzetösszege átrendezéssel

$$(a^2+c^2+e^2)n^2+2(ab+cd+ef)n+(b^2+d^2+f^2). \tag{4}$$

Ha találunk olyan $a,b,\ldots,f$ egész számokat, amelyekkel (4) egymás utáni együtthatói egyenlők a (2) jobb oldalán álló együtthatókkal:

$$a^2+c^2+e^2=6, \tag{5}$$

$$2(ab+cd+ef)=12, \tag{6}$$

$$b^2+d^2+f^2=8, \tag{7}$$

evvel igazoltuk az állítást, és a talált $a,b,\ldots,f$ számokkal képezett (3) kifejezések minden n-re adnak egy alapszámhármast a kívánt négyzetösszegfelbontáshoz.

(5) és (7) szerint az $a,b,\ldots,f$ együtthatók négyzetei számára csak a 6-on, 8-on aluli négyzetszámok jönnek szóba: 0, 1 és 4. Ezek közül vett három tagból a 6-os, 8-as összeg $1+1+4$, ill. $0+4+4$ alakban kiadódik. Ennek alapján vehetjük egyrészt, hogy $a=c=1$, $e=2$, másrészt hogy, b, d, f értékei valamely sorrendben a 0, 2, 2 számok, és e sorrendet cserélgetve megvizsgálhatjuk, hogy teljesül-e (6). Mindjárt a $b=0$, $d=f=2$ értékrendszerrel való próba eredményes, ezekkel a (3) kifejezések az (1) jobb oldalán álló alapokat adják.

2. Az (1) jobb oldalán álló alapszámok bármelyike helyett (-1)-szeresét véve – vagyis pl. c és d előjelének egyidejű cseréjével – csupán látszólag kapnánk újabb felbontást, hiszen így maguk a négyzetszámok ugyanazok maradnak. (Ilyenkor (5) és (7)-ben a négyzetek, és (6)-ban a szorzatok értéke változatlan.) Felvetődik azonban a kérdés: található-e a (3) együtthatói számára adódott számok sorrendjének, valamint pl. c és d egyikének előjelét megváltoztatva – vagy másképpen – az (1)-től lényegesen különböző felbontás?

Nyilván sem (5)-ben, sem (7)-ben nem lehetséges más megfelelő előállítás. Továbbá, hogy az eddigi $b=0$, $d=2$ értékeket felcserélve sem kapunk új felbontást, $f=0$, $b=2$-vel pedig a (6) bal oldalán álló $ab+cd+ef$ kifejezés értéke kisebbnek adódik. Mindig az eddigi 6-nál kisebbnek adódik ez a kifejezés, vagy változatlan marad, ha bármelyik tagjának egyik tényezőjét ellentett jellel próbáljuk venni. Így tehát nem kapunk új felbontást.

Nem jöhet szóba a (3)-beliek helyére elsőnél magasabb fokú kifejezés sem – pl. egy vagy több másodfokú –, mert ilyenek négyzetében a legmagasabb fokú tag pozitív, és így összegük nem lehet 0, amint (2) jobb oldala kívánná.

3. Legutóbbi meggondolásunkat nem teszi feleslegessé az az észrevétel, hogy $4^3 - 2^3 = 56$-ra csak a $2^2 + 4^2 + 6^2$ felbontást adtuk, és könnyű belátni, hogy más ilyen felbontás nincs. Gondolni kell ugyanis arra, hogy e felbontás 2, 4, 6 alapszámait más (3) alakú kifejezések is kiadhatnák $n = 2$-vel.

II. megoldás: Ismert azonosság szerint

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Innen az $x - y = 2$ értéket figyelembe véve, alkalmas csoportosítással azonnal adódik, hogy

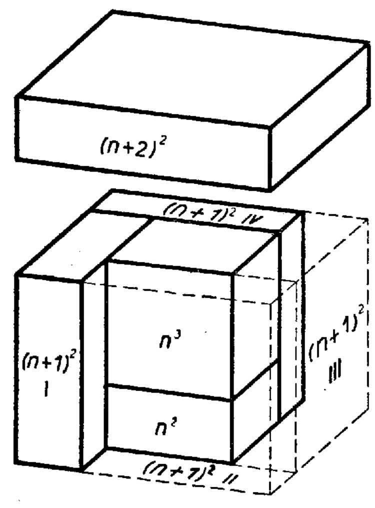
$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 = \\ &= x^2 + y^2 + (x+y)^2, \end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés: Pozitív n esetére a bebizonyított azonosságnak geometriai jelentést adhatunk, ha (1)-et a következő alakban írjuk:

(8) $$(n+2)^3 = n^3 + n^2 + (n+2)^2 + 4(n+1)^2.$$

Tekintsünk minden tagot egy-egy test térfogata mértékszámának. Így a köbök $n+2$, ill. n egységnyi élű kockák, a négyzetek pedig hat olyan egységnyi magasságú, négyzetes oszlop térfogatát jelentik, amelyeknek alapéle rendre n, $n+2$, ill. négy esetben $n+1$ egység.



Így (8) azt fejezi ki, hogy a nagyobb kocka térfogata egyenlő a további 7 test térfogatának összegével. Ennél többet láthatunk be könnyen: a 7 testből, mindegyiket tömörnek tekintve, hézagtalanul össze is lehet állítani egy a nagyobbal egybevágó kockát. Fektessük le evégett az „n^2-térfogatú” oszlopot, állítsuk rá az „n^3”-kockát úgy, hogy a 4–4 oldallapjuk síkjai egybeessenek, így n egységnyi alapélű, $n+1$ magasságú O_1 oszlopot kapunk. Állítsuk O_1 köré egy oldallapjukon állva, négyzetlapjukkal O_1 egy-egy oldallapjához zárva a négy $(n+1)^2$ térfogatú oszlopot úgy, hogy egy-egy oldallapjuk a belső oszlop egy-egy oldallapjának síkjába essék, így $n+1$ egységnyi magas és $n+2$ alapélű O_2 oszlopot kapunk. Végül fektessük rá O_2-re az $(n+2)^2$ térfogatú oszlopot úgy, hogy oldallapjaik síkjai egybeessenek.