A kettős egyenlőtlenség részeit külön-külön bizonyítjuk mindkét esetben annak megmutatásával, hogy a jobb és bal oldal különbsége nem lehet negatív. – Valóban, az első egyenlőtlenség jobb és bal oldalának különbsége így írható:

$$a(1-b-a)+b(1-c-b)+c(1-a-c). \tag{2}$$

A feltétel szerint

$$a+b\leq 1, \qquad b+c\leq 1, \qquad c+a\leq 1, \tag{3}$$

így

$$1-b-a\geq 0, \qquad 1-c-b\geq 0, \qquad 1-a-c\geq 0, \tag{4}$$

és ezeket rendre a pozitív a, b, c-vel szorozva és összeadva a bal oldalon (2)-t, a nem nagyobb jobb oldalon pedig 0-t kapunk. Ezzel (1) első részét bebizonyítottuk.

(2) akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha (4)-ben, és ezért már (3)-ban is mind a három helyen az egyenlőségi jel érvényes. Egyenlőségi jellel (3)-ban egyenletrendszer áll előttünk a, b, c-re; megoldása

$$a=b=c=\frac{1}{2}, \tag{5}$$

ez a szükséges és egyben elegendő feltétele annak, hogy (1) első részében egyenlőség álljon fenn.

(1) második része jobb és hal oldalának különbségéről könnyen észrevehetjük, hogy egy teljes négyzet fele:

$$\frac{1}{2}(1+a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}(1-a-b-c)^2,$$

tehát valóban nem lehet negatív. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség második része is helyes. – A két oldal akkor és csak akkor egyenlő, ha a négyzet alapja 0, vagyis

$$a+b+c=1. \tag{6}$$

Minthogy (5) és (6) egyidejűleg nem állhat fenn, azért a, b, c-nek nincs olyan értékrendszere, amely mellett (1)-ben egyidejűleg mindkét helyen az egyenlőség jele volna érvényes.

Megjegyzések. 1. Az utóbbi bizonyítás során nem használtuk ki a (3) feltételeket, sőt az a, b, c számok pozitívságát sem, ezért (1) második része a, b, c-nek bármely értékrendszere mellett fennáll. (Székely Jenő észrevétele.)

2. Más irányú általánosítása (1) második részének: tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokra

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\ldots+$$
$$+a_2a_n+a_3a_4+\ldots+a_{n-1}a_n)\leq\frac{1}{2}(1+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).$$

Bizonyítása ugyanúgy történhet, ahogyan (1) második részét bizonyítottuk. (Fritz József dolgozatából.)

3. Az egyenlőtlenség első részének bizonyítását is átvihetjük 3 helyett bármilyen $n\geq 2$ számú tagra. Ha ugyanis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olyan pozitív számok, amelyek közül kettő-kettőnek az összege legfeljebb 1, akkor

$$\begin{aligned}0\leq\frac{1}{2}\{&a_1[(1-a_1-a_2)+\ldots+(1-a_1-a_n)]+a_2[(1-a_2-a_1)+\\&+(1-a_2-a_3)+\ldots+(1-a_2-a_n)]+\ldots+a_n[(1-a_n-a_1)+\\&+\ldots+(1-a_n-a_{n-1})]\}=\frac{n-1}{2}[(a_1+\ldots+a_n)-\\&-(a_1^2+\ldots+a_n^2)]-(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)\end{aligned}$$

és innen átrendezéssel a következő általánosítást nyerjük:

$$\frac{n-1}{2}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\leq\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n).$$

4. A kimondott általánosítások n-nek bármely $n\geq 2$ értékére fennállanak, vagyis n minden olyan értékére, amely mellett az egyenlőtlenségeknek egyáltalán értelmük van.

5. Összefoglalva a 2. és 3. általánosítást az (1) kettős egyenlőtlenség következő általánosítását nyertük: Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olyan pozitív számok, amelyek közül bármelyik kettőnek összege legfeljebb 1, akkor

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{2}(a_1^2+\ldots+a_n^2)&\leq\frac{n-1}{2}(a_1+\ldots+a_n)-(a_1a_2+\ldots+a_{n-1}a_n)\leq\\&\leq\frac{1}{2}(1+a_1^2+\ldots+a_n^2)+\frac{n-3}{2}(a_1+\ldots+a_n).\end{aligned}$$

A tett feltevés az első rész fennállásának elegendő, de nem szükséges feltétele már a feladatban szereplő $n=3$ esetben sem; pl. $n=3$, $a_1=1/4$, $a_2=1/3$, $a_3=3/4$ esetében az egyenlőtlenség első része fennáll, bár $a_2+a_3>1$. – A második rész $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bármely értékei mellett fennáll.

6. Az (1) második része így is bizonyítható: nemnegatív számok mértani közepe nem nagyobb számtani közepüknél. Ezt az 1 és $(a+b+c)$ pozitív számokra alkalmazva

$$\sqrt{1(a+b+c)} \leq \frac{1+(a+b+c)}{2}. \tag{7}$$

Itt mindkét oldal pozitív, ezért a bal oldal négyzete sem nagyobb a jobb oldal négyzeténél:

$$a+b+c \leq \frac{1}{4}(1+a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{2}(a+b+c)+\frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Innen pedig, 2-vel szorozva és a négyzetes tagok kivételével minden tagot a bal oldalra átvive (1) második részét kapjuk. – (7)-ből is látható, hogy egyenlőség csak (6) fennállása esetén következik be.