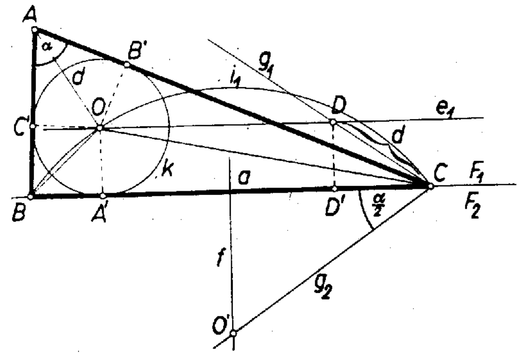
I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak, legyen a keresett háromszög ABC, ebben $BC = a$, $BAC\sphericalangle = \alpha$ és – O-val a beírt k kör középpontját jelölve $AO = d$ az adott szakasz.



Legyenek továbbá k-nak az oldalakon levő érintési pontjai A', B', C' és sugara ϱ. Az OBC háromszögben

$$COB\sphericalangle = 180^\circ - OBC\sphericalangle - OCB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ - \beta - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

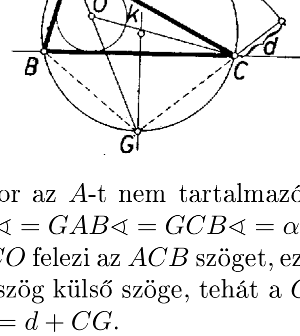
Eszerint O csak azon az i_1, i_2 körívpáron lehet, amelynek (B és C-től különböző) pontjaiból az adott BC szakasz a megszerkeszthető $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ szögben látható. Másrészt megszerkeszthetjük $OB' = \varrho$-t, mert az AOB' derékszögű háromszög alakját a d átfogó és az $\alpha/2$ hegyesszög meghatározza, – és evvel még egy mértani helyet kapunk O-ra, ugyanis O csak a BC-től ϱ távolságban fekvő e_1, e_2 párhuzamos egyeneseken lehet.

Ezek alapján a szerkesztés a következő. Felvesszük a $BC = a$ szakaszt és kijelöljük, hogy a háromszöget a BC egyenessel létrejött F_1 és F_2 félsíkok közül F_1-en kívánjuk kapni. F_1-en fekszik O is, elég lesz tehát az i_1-et és e_1-et megszerkesztenünk. CB-re a C csúcsban mindkét félsíkon felmásoljuk az $\alpha/2$ szöget, a szárak g_1, g_2, megszerkesztjük BC-nek f felező merőlegesét, majd g_2 és f-nek O' metszéspontja körül $O'B = O'C$ sugárral megrajzoljuk i_1-et. e_1-et pedig úgy kapjuk, hogy g_1-re C-ből felmérjük d-t, és ennek D végpontján át BC-vel párhuzamost húzunk. i_1 és e_1 közös pontja O, ennek vetülete BC-re A' és $OA' = \varrho$, ezek alapján megrajzoljuk a k kört. Most már az A csúcsot a B és C-ből k-hoz húzott második érintők metszéspontja adja. (Ezek céljára C', B'-t a B körül BA', ill. C körül CA' sugárral írt körrel metszhetjük ki.)

Szerkesztésünk helyes, mert a BCO' egyenlő szárú háromszög O'-nél levő szöge kétszerese $\alpha/2$ pótszögének, azaz $180^\circ - \alpha$, ez egyben a O' középpont körül $O'B$ sugárral írt kör F_1-beli i_1 ívéhez tartozó középponti szög. Így a kör F_2-beli ívéhez $180^\circ + \alpha$ nagyságú középponti szög tartozik, tehát a BOC kerületi szög ennek fele: $90^\circ + \alpha/2$. Most már a $C'BC$ és $B'CB$ szögek összege kétszerese az OBC és OCB szögek összegének, a BOC szög kiegészítő szögének, $90^\circ - \alpha/2$-nek, azaz $180^\circ - \alpha$-val egyenlő, tehát a szerkesztett érintők A-nál valóban α szöget zárnak be (az a szögük ekkora, amelynek terében a BC szakasz van). AO felezi az A-ból k-hoz húzott érintők szögét, ezért $OAB'\sphericalangle = \alpha/2 = DCB\sphericalangle$, továbbá D-nek BC-n levő vetületét D'-vel jelölve az AOB' és CDD' derékszögű háromszögekben $OB' = OA' = DD'$, így e két háromszög egybevágó, tehát $AO = CD = d$.

A szerkesztés lépései O előkészítéséig egyértelműen végrehajthatók (α nyilván 0° és 180° közti szög, így fele hegyesszög). i_1 és e_1 közös pontjainak száma szerint O-ra 2, 1, 0 pontot kapunk, és ezekből ugyanennyi háromszöget, mert a további lépések ismét egyértelműek. Ha 2 megoldás adódik, ezek egybevágók, mert egymásnak f-re nézve tükrös párjai, így a feladatnak lényegében legfeljebb 1 megoldása van.

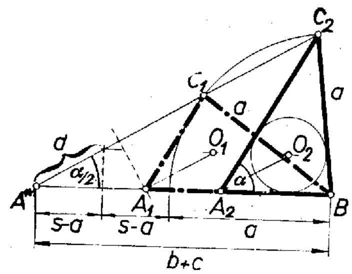
II. megoldás: Az adott α szög az a oldal látószöge az A csúcsból, ennek alapján ismert módon megszerkeszthetjük a keresett háromszög k^* körülírt körét.



A BAC szög AO felezője k^*-ot másodszor az A-t nem tartalmazó BC ívnek G felezőpontjában metszi, mert a kerületi szögek tétele szerint $GBC\sphericalangle = GAC\sphericalangle = GAB\sphericalangle = GCB\sphericalangle = \alpha/2$, tehát a BCG háromszögben $GB = GC$, és e húrokhoz egyenlő ívek tartoznak. Másrészt CO felezi az ACB szöget, ezért az OCG háromszögben $OCG\sphericalangle = (\gamma+\alpha)/2$. Ekkora a COG szög is, mint az ACO háromszög külső szöge, tehát a COG háromszög egyenlő szárú: $OG = CG$. Így A-nak G-től való távolsága $AG = AO + OG = d + CG$.

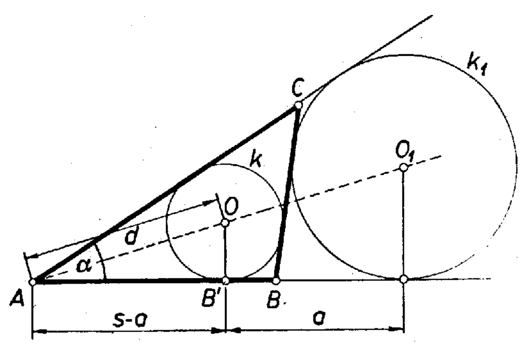
Ezek alapján a szerkesztés a következő. k^*-ban a BC-re merőleges átmérőnek az a végpontja G, ahonnan BC látószöge $180^\circ - \alpha$. (Ez is mutatja, hogy G azonos az I. megoldásban használt O'-vel.) A GC szakasznak C-n túli meghosszabbítására rámérjük d-t. A G körül $d+CG$ sugárral leírt kör k^*-ból kimetszi A-t. Aszerint, hogy a $d+CG$ szakasz kisebb, ill. nagyobb k^* átmérőjénél, ill. éppen egyenlő vele, 2, 0, ill. 1 megoldást kapunk. – Szerkesztésünk helyessége bizonyításául csak azt kell megmutatnunk, hogy a kapott A pontot G-vel összekötő szakasznak A-tól d távolságra, azaz G-től CG távolságra fekvő O^* pontja azonos az ABC háromszögbe írt kör középpontjával. Valóban, a CGO^* háromszög egyenlő szárú, és benne $CGO^*\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \beta$, így $O^*CG\sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$, ennélfogva $O^*CB\sphericalangle = O^*CG\sphericalangle - BCG\sphericalangle = O^*CG\sphericalangle - \alpha/2 = 90^\circ - (\alpha+\beta)/2 = \gamma/2$, vagyis O^*C felezi a C-nél fekvő szöget. Másrészt O^* az A-nál fekvő szög felezőjén is rajta van, tehát $O^* = O$.

III. megoldás: Az előbbi AOB' háromszöggel egybevágó háromszöget szerkesztve megkapjuk AB'-t, az A-ból k-hoz húzható érintőszakaszt. Erről ismeretes, hogy egyenlő $s-a$-val, ahol s a háromszög kerületének fele. Ebből (a szokásos jelölésekkel) $b+c = 2s-a = 2(s-a)+a$ alapján előállíthatjuk az A csúcsból kiinduló oldalak összegét, ezzel pedig a feladatot visszavezettük a háromszögnek az a, $b+c$, α adathármasból való ismert szerkesztésére: az A^* csúcsú $\alpha/2$ szög egyik szárára felmérjük $b+c$-t, ennek B végpontjából a sugarú körívvel a másik szárból kimetsszük C-t, majd A^*C felező merőlegesével az első szárból A-t.



A körívnek a szög szárával 2, 1, 0 közös pontja, egyszersmind ennyi megoldás van. Két metszéspont esetén mindkettő A^*-nak ugyanazon oldalára esik (különben $a > b+c$ volna), ezért A_1 és A_2 az A^*B szakaszra esnek. Az így adódó A_1BC_1 és A_2C_2B háromszögek egybevágók. Ugyanis az $A^*C_1A_1$ és $A^*C_2A_2$ egyenlő szárú háromszögek külső szögeként $C_1A_1B\sphericalangle = C_2A_2B\sphericalangle = \alpha$, másrészt $A^*C_1A_1\sphericalangle = A^*C_2A_2\sphericalangle = \alpha/2$. $C_1BA_1\sphericalangle = \varepsilon$ jelöléssel $BC_1A_1\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - \varepsilon$, így $C_2C_1B\sphericalangle = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \varepsilon) - \alpha/2 = \varepsilon + \alpha/2$. Ámde a BC_1C_2 háromszög egyenlő szárú, ezért $C_1C_2B\sphericalangle = \varepsilon + \alpha/2$, tehát $A_2C_2B\sphericalangle = \varepsilon$. Így a kérdéses háromszögek egy oldalban és két megfelelő szögben megegyeznek, valóban egybevágók.

IV. megoldás: α és d ismeretében megszerkeszthető O, k és α szárainak az érintési pontig terjedő szakasza: $s-a$. Ezzel egyúttal $(s-a)+a = s$ is ismert, a csúcstól ekkora távolságban érinti α szárait az a oldalt kívülről érintő k_1 hozzáírt kör, így ez is megszerkeszthető.



Most már k és k_1 közös belső érintőinek az α szög szárai közé eső szakasza az a oldal.