Olyan a, b, c természetes számokból álló hármast kell keresnünk, amelyre

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \tag{1}$$

Feltehetjük, hogy a a legkisebb, c a legnagyobb nevező a hármasban (egyenlőség persze nincs kizárva), vagyis

$$(0<)a\leq b\leq c. \tag{2}$$

Eszerint reciprok értékeik közül $1/a$ a legnagyobb és $1/c$ a legkisebb:

$$\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}(>0). \tag{3}$$

Tájékozódjunk a nagyságáról. Evégett (1) jobb oldalán a második és harmadik tagot (3) alapján előbb a nem kisebb $1/a$-val, majd a biztosan kisebb 0-val helyettesítjük; így olyan két egyismeretlenes egyenlőtlenséget kapunk, melyeknek $1/a$ a nagyobb, ill. a kisebb oldalán áll:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a},\quad \text{innen}\quad a\leq\frac{24}{5}<5,$$
$$\frac{5}{8}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a},\quad \text{innen}\quad a>\frac{8}{5}>1.$$

Ezek szerint a-ra három lehetőség van: $a=2$, $a=3$, vagy $a=4$.

1. Keressünk először $a=4$-hez megfelelő b-t és c-t. (1)-ből

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}. \tag{4}$$

A fenti meggondolás első felét b-re ismételve (3) alapján

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b},\qquad \text{tehát}\quad b\leq\frac{16}{3}(<6).$$

Másrészt most (2) szerint b is legalább 4, tehát $b=4$, vagy $b=5$. Ezekkel (4)-ből $c=8$, ill. $c=40/7$ adódik, de az utóbbi nem egész szám. – Eszerint $a=4$ mellett egy felbontást kapunk:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}. \tag{1}$$

2. Legyen most $a=3$. Ekkor (1) így alakul

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=\frac{7}{24}, \tag{5}$$

innen a fentiekhez hasonlóan

$$\frac{7}{24}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b},\qquad \text{tehát}\quad b\leq\frac{48}{7}<7,$$

eszerint most a $b=3$, 4, 5 és 6 lehetőségek jönnek szóba. A megfelelő c-értékek (5)-ből: $c=-24$, $c=24$, $c=120/11$, ill. $c=8$. Csak a második és a negyedik érték természetes szám, így két felbontást kapunk:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}. \tag{II, III}$$

3. Végül az $a=2$ esetben (1)-ből

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Itt alkalmas átalakítással közvetlenül áttekinthetjük az összes b, c értékpárokat. Távolítsuk el a törteket, gyűjtsünk minden tagot az egyenlet jobb oldalára, és igyekezzünk a kifejezést szorzattá alakítani:

$$8b+8c=bc,\quad 0=bc-8b-8c=(b-8)(c-8)-64.$$

Eszerint 64-et kell minden lehető módon két egész tényezőre bontani. A tényezőkre (2) folytán $b-8\leq c-8$, másrészt nem lehet a két tényező negatív, mert akkor a kisebbre $b-8\leq-8$, $b\leq 0$ adódnék. Így a lehetséges felbontások:

$$b-8=1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 8,$$
$$c-8=64,32,16,8,$$

és ezekből a következő felbontások adódnak:

$$\text{(IV–VII)} \qquad \frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}.$$

Mindezek szerint 5/8-ra az előírt alakban a fenti hét (I)–(VII) felbontás lehetséges.

Megjegyzés. Az $a=3$ esetben adódott

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$$

felbontás mutatja, hogy ha elejtjük a pozitívság követelményét, akkor a feladatnak több megoldása van. A fentihez hasonló gondolatmenettel további 6 ilyen felbontást találunk:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{1}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{56}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8};$$
$$\frac{5}{8}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}=\frac{1}{1}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}.$$