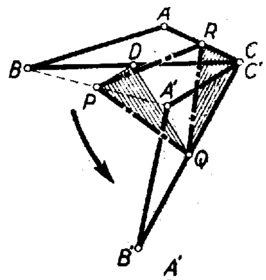
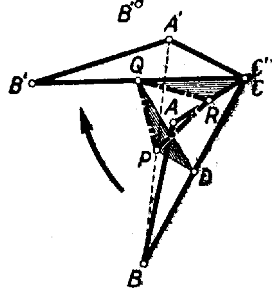
A kérdéses felezőpontokat rendre P, Q, R-rel jelölve azt bizonyítjuk, hogy a PQR háromszögnek QP és QR oldalai egyenlők és egymásból 60°-os elforgatással állnak elő. Evégett a BC oldal D felezőpontját segítségül véve megmutatjuk, hogy a QDP háromszög 60°-os forgatással áll elő a QCR háromszögből.





A QD szakasz a $CB'B$ szabályos háromszögnek középvonala, így a CQD háromszög is szabályos, tehát a Q pont D-ből az eredeti forgatással áll elő, és $QD = QC$; továbbá QD ugyanazon irányú 60°-os forgatással keletkezik QC-ből, mint amelyikkel CQ a CD-ből, vagyis amelyik forgatással $A'B'C'$-t az ABC-ből képeztük. Hasonlóan a DP szakasz a CBA' háromszögnek középvonala, így fele a CA' oldalnak, egyszersmind CA-nak is – mert a $CA'A$ háromszög szabályos –, tehát egyenlő CR-rel; továbbá DP-nek és CA'-nek iránya ugyancsak az eredeti forgatással áll elő CA, azaz CR irányából.

Ezek szerint a QDP szög szárai a QCR szög száraiból ugyanakkora és ugyanazon irányú forgatással állnak elő, tehát e két szög egyenlő. Egyenlők a QDP és QCR háromszögeknek e szögek megfelelő szárain fekvő oldalai is, így a két háromszög egybevágó, és egymáshoz képest valóban 60°-kal vannak elfordulva. Ennélfogva harmadik megfelelő oldalpárjukra $QP = QR$, és $RQP\sphericalangle = 60°$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések. 1. Az ábra több más módon is kiegészíthető oly egybevágó háromszögekkel, amelyek segítségével a PQR háromszög két oldalának egyenlősége bizonyítható. A versenyzők általában a fenti bizonyításénál bonyolultabb utakat követtek; alig volt két versenyző, aki egyformán bizonyított volna. Egyesek nem vették észre, hogy könnyű meghatározni a PQR háromszög két oldalának szögét, ehelyett külön bizonyították be további két oldal egyenlőségét.

2. Az előbbi gondolatmenettel bizonyítható tételünknek következő általánosítása. Ha az ABC háromszögnek a C csúcsa körüli 60°-os elforgatása után az $A'B$, CB' és AC' szakaszokat tetszőleges, de ugyanazon arány szerint osztjuk (pl: mindegyiket harmadoljuk), az osztópontok szabályos háromszöget alkotnak.

3. Néhány versenyző észrevette bizonyítandó tételünk kapcsolatát a következő tétellel:[1] *„Az OAB és $OA'B'$ ellentétes körüljárású szabályos háromszögek O csúcsa közös. Bizonyítsuk be, hogy … az AA', OB és OB' … szakaszok felezőpontjai szabályos háromszög csúcsai."* – A versenyfeladatban az ABC háromszög 60°-os elforgatása során keletkező CAA' és $CB'B$ háromszögek C csúcsa közös, és körüljárásuk ellentétes. Ábránk betűzését úgy átírva, hogy a közös csúcs jele C, ill. C' helyett O legyen, a többi csúcsé pedig A, B, A' és B' helyett rendre B, A', A és B', tüstént látjuk, hogy az idézett állítás éppen a PQR háromszög szabályosságát mondja ki.

4. A feladatot felfoghatjuk úgy is, hogy az $AA'C$ és $C'BB'$ egyező körüljárású szabályos háromszögek megfelelő csúcsait összekötő szakaszok felezőpontjairól mutattuk meg, hogy újabb szabályos háromszöget alkotnak. Ebben a formában a feladat lényegesen általánosítható, amennyiben sem a közös csúcsnak, sem a háromszögek szabályos voltának nincs benne lényeges szerepe.

Legyen ABC és $A_1B_1C_1$ két hasonló, egyező körüljárású háromszög, ekkor az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok A_2, B_2, C_2 felezőpontjai is az ABC háromszöghöz hasonló és egyező körüljárású háromszöget alkotnak.

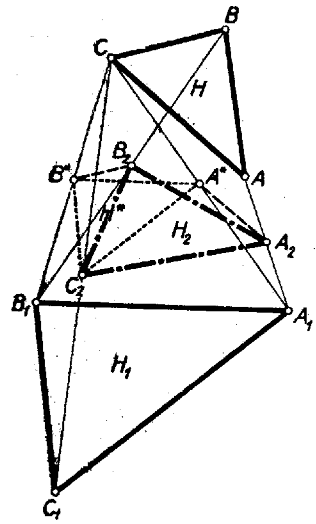
Ez a tétel is könnyen bizonyítható komplex számok segítségével,[2] de a versenyfeladat fenti bizonyításához hasonlóan is bizonyítható.

Nevezzük az állításban szereplő háromszögeket a csúcsok indexezésének megfelelően H, H_1 és H_2 háromszögnek. Összekötve C-t az A_1 és B_1 csúccsal is, a keletkező szakaszok felezőpontja legyen A^* és B^*. Mivel $A^*B^*C_2$ – amit a továbbiakban H^*-gal fogunk jelölni – H_1-nek C-ből felére kicsinyített képe, így elég H_2 és H^*-ról megmutatni, hogy hasonlók és egyező körüljárásúak.

---

[1] Lásd Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, 48. feladat, 63. és 71. o. Tankönyvkiadó 1957, Középiskolai Szakköri Füzetek.

[2] Lásd ugyanott, 77. o. 9. Példa.



A_2A^* és A^*C_2 mint az AA_1C, ill. A_1CC_1 háromszög középvonala párhuzamos és egyirányú az AC, ill. A_1C_1 szakasszal és fele akkora. Hasonlóan B_2B^* és B^*C_2 mint a BB_1C, ill. B_1CC_1 háromszög középvonala a BC, ill. B_1C_1 szakasszal párhuzamos, egyező irányú és fele akkora. Így az $A_2A^*C_2$ háromszögben az A^*-nál levő szög és $B_2B^*C_2$-ben a B^*-nál levő szög egyaránt annak a szögnek a kiegészítő szögével egyenlő, amellyel H_1-el van forgatva H-hoz képest, az ezeket a szögeket közrefogó oldalak aránya pedig (mindkétszer a fönti sorrendben véve) H és H_1 megfelelő távolságainak arányával egyezik meg. Ebből következik, hogy az $A_2A^*C_2$ és $B_2B^*C_2$ háromszögek hasonlóak és egyező körüljárásúak. Ekkor azonban A_2C_2 az A^*C_2-ből és B_2C_2 a B^*C_2-ből egyező irányú és nagyságú elforgatással és ugyanolyan arányú nyújtással keletkezik, s így ugyanezzel az elforgatással és nyújtással keletkezik H_2 is H^*-ból. Ezzel állításunkat igazoltuk.

A bizonyítás könnyen láthatóan abban az esetben is érvényben marad, ha egyes szereplő háromszögek egyenesszakasszá fajulnak. Ez bekövetkezik akkor is, ha H és H_1 szerepét a versenyfeladat $AA'C$ és $C'BB'$ háromszögének adjuk át. Ekkor A^* a $C \equiv C'$ ponttal esik egybe, B^*-nak pedig a feladatmegoldás D pontja felel meg.