I. megoldás:

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3=1+3\cdot\frac{x}{3}+3\cdot\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{27}.$$

Mivel x pozitív, ezért a jobb oldal minden tagja pozitív. Elhagyva az utolsó két tagot, a jobb oldal kisebbé válik:

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3>1+x. \tag{2}$$

Innen mind a két oldalból köbgyököt vonva a bizonyítandó állításra jutunk.

Meg kell még mutatnunk, hogy (2)-ről (1)-re következtetve nem követünk el hibát, vagyis a köbgyökvonás helyes bizonyítási lépés. Bizonyítjuk, hogy ha tetszés szerinti a^3, b^3 számokra

$$a^3>b^3,$$

azaz

$$a^3-b^3>0, \tag{3}$$

akkor

$$a>b, \tag{4}$$

azaz

$$a-b>0.$$

Ugyanis (3) bal oldalát tényezőkre bontva nyerjük, hogy

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]>0.$$

Mivel $a-b$-nek az utolsó alakbeli szorzója pozitív, egyenlőtlenségünk helyes marad, ha avval osztjuk. Ezzel éppen a bizonyítandó (4) egyenlőtlenségre jutunk.

Megjegyzés. A kérdéses szorzó 0 is lehet, ti. ha egyszerre fennáll $a+b/2=0$ és $b=0$. Ezekből azonban ellentétbe jutunk feltevésünkkel, ugyanis $a=-b/2=0$ és így $a^3=b^3\,(=0)$.

II. megoldás: Akárhány $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ szám számtani közepén értjük az $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ számot, mértani közepén pedig az $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ számot. Általánosan is igaz a következő, $n=2$ esetére közismert egyenlőtlenség: Ha az $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ számok mindegyike pozitív, akkor a mértani közepük nem nagyobb, mint a számtani közepük. Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $x_1=x_2=\ldots=x_n$.[1] Legyen most $n=3$, $x_1=x_2=1$, $x_3=1+x$, ekkor feltevésünknél fogva $x_3>x_1$, és így a hivatkozott tétel alapján

$$\frac{1+1+1+x}{3}>\sqrt[3]{1\cdot1\cdot(1+x)},$$

ami bizonyítandó volt.

Megjegyzések. Eszerint tételünk már $x>-1$-től kezdve fennáll, mert már ekkor teljesül $x_3=1+x>0$, kivéve mégis az $x=0$ esetet, amikor a két oldal egyenlő.

A bizonyítandó állítás más irányú általánosítása: Legyen $x>-1$, $x\neq0$ és $n>1$, egész szám, ekkor

$$1+\frac{x}{n}>\sqrt[n]{1+x}.$$

Mind a két általánosításra rámutatott dolgozatában *Bollobás Béla.*

Meg lehet mutatni, hogy a szóban forgó egyenlőtlenségnek az $x>-9$, $x\neq0$ számok tesznek eleget.

[1] Bizonyítását lásd pl. *Kürschák – Hajós – Neukomm – Surányi:* Matematikai Versenytételek I. 111. o.