**I. megoldás:** A bizonyítandó állítás fennállásának szükséges és egyben elégséges feltétele, hogy az egyenlet diszkriminánsa $D \geq 0$ legyen $p$ bármely értéke mellett. A diszkrimináns

$$D = p^2 + 12(p+2)(4p+7) = 49p^2 + 180p + 168, \tag{1}$$

és ez $p$-nek másodfokú függvénye. E függvény képe parabola, így elég azt bizonyítanunk, hegy e parabola minden pontja a $p$ abszcissza-tengely fölött, vagy a tengelyen helyezkedik el. Helyettesítésekkel nyerjük, hogy a parabola egyes pontjai valóban a $p$-tengely fölött vannak, pl. $p = 0$ esetén $D = +168$. Minthogy a parabola folytonos vonal, ezért, ha volna pontja a $p$-tengely alatt is, akkor metszenie kellene a tengelyt, és az ilyen pontra $D = 0$ volna. Ámde a

$$49\,p^2 + 180\,p + 168 = 0 \tag{2}$$

egyenlet diszkriminánsa

$$D_1 = 180^2 - 4 \cdot 49 \cdot 168 < 0,$$

tehát a (2) egyenletnek nincs (valós) gyöke, és az (1) parabola valóban nem metszi a $p$ tengelyt, egészen a $p$-tengely fölött helyezkedik el.

*Megjegyzés.* Nem lehet elfogadni (2) gyökeinek megvizsgálása helyett a parabola néhány pontjának ábrázolása után a szemléletre való hivatkozást. Számos versenyző így „bizonyított”.

**II. megoldás:** (1) átalakításával pusztán számviszonyok alapján is belátható, hogy $D$ a $p$-nek minden értéke mellett nagyobb 0-nál:

$$D = 49\,p^2 + 180\,p + 168 = \left(7\,p + \frac{90}{7}\right)^2 + \frac{132}{49}.$$

E kifejezés első tagja $p$ bármely értéke mellett pozitív, vagy 0, mert négyzet, a második tagja pozitív.

Ezzel az állításnál valamivel többet bizonyítottunk be. Miután $D$ határozottan nagyobb 0-nál, az adott egyenletnek $p$ bármely (valós) értéke mellett két *különböző* (valós) gyöke van.