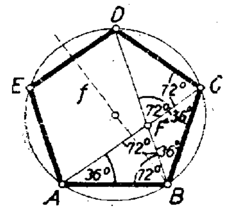
**I. megoldás:** Legyen az $ABCDE$ szabályos ötszög $AC$ és $BD$ átlóinak metszéspontja $F$. Az $AF=AB$ egyenlőséget abból mutatjuk meg, hogy az $ABF$ háromszögnek $BF$-en fekvő két szöge egyenlő (1. ábra).



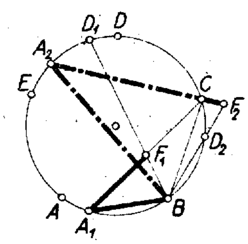

*1. ábra*

Minden (konvex) ötszög szögeinek összege $3\cdot 180^\circ=540^\circ$. A szabályos ötszög szögei egyenlők, így egy-egy szöge $108^\circ$. Az ötszög köré írható körből az oldalak, mint egyenlő húrok, egyenlő íveket metszenek le. Az ötszög mindegyik szögének szárai között három ilyen ív fekszik, ezért mindegyik ív az ötszög csúcsaiból $108^\circ:3=36^\circ$-nyi szögben látható. Eszerint $BAF\sphericalangle=BAC\sphericalangle=36^\circ$, $ABF\sphericalangle=ABD\sphericalangle=2\cdot 36^\circ=72^\circ$, így $AFB\sphericalangle=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ=ABF\sphericalangle$, amit bizonyítani akartunk.

Az $AF$ szakasz az $AC$ átlónak nagyobbik darabja: $AF>FC$, mert az $ABF$ háromszögben $AF$, az egyik $72^\circ$-os szöggel szemben fekvő oldal, nagyobb $BF$-nél, a $36^\circ$-os szöggel szemben fekvő oldalnál, $BF$ pedig egyenlő $FC$-vel, mert a $BCF$ háromszög – két $36^\circ$-os szöge révén – ugyancsak egyenlő szárú.

Hasonlóan látható be, hogy $DF=DC$, és hogy $DF>FB$. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

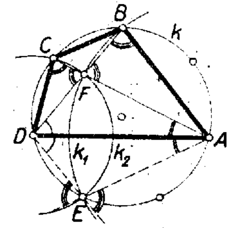
*Megjegyzések.* 1. A bizonyítás első része csak azt használta fel, hogy a (rövidebb) $BC$ ív egy, és hogy a (rövidebb) $DA$ ív két ötödrésze a kör kerületének. Eszerint az $AF=AB$ egyenlőség érvényes marad akkor is, ha a $DA$ ívet a körön elforgatjuk (2. ábra). – Vegyük észre, hogy az $E$ csúcs a bizonyítás egyik részében sem szerepel.




*2. ábra*

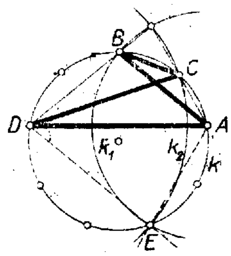
2. Az $AFB\sphericalangle=ABF\sphericalangle$ egyenlőséget a mértékszámok kiszámítása nélkül is megmutathatjuk. Az $ABD$ szög két ötszögoldalhoz tartozó íven nyugvó kerületi szög, a $CBD$ és $ACB$ kerületi szögek pedig egy-egy ilyen íven nyugszanak. Így az utóbbiak összege egyenlő az $ABD$ szöggel, másrészt ez az összeg a $BCF$ háromszög külső szögeként a $BFA$ szöggel is egyenlő. – Itt viszont csak azt használtuk fel, hogy az $ABCD$ húrnégyszög oldalai által lemetszett körívekre fennáll az $\widehat{AB}+\widehat{CD}=\widehat{AD}$ egyenlőség. Tehát tulajdonképpen a következő általánosabb tételt bizonyítottuk be: ha az $ABCD$ húrnégyszögben fennáll az $\widehat{AB}+\widehat{CD}=\widehat{AD}$ egyenlőség, akkor $AF=AB$ és $DF=DC$, ahol $F$ az $AC$ és $BD$ átlók metszéspontja. (Mindkét átlónak van egy oldallal egyenlő darabja, ahogyan az eredeti tétel is állítja.)

Ennek a tételnek egy más bizonyítása: az $A$ körül $AB$ sugárral írt $k_1$ körnek az $ABCD$ négyszög $k$ körülírt körével való második közös pontját $E$-vel jelölve (3. ábra) $\widehat{DE}=\widehat{AD}-\widehat{AE}=\widehat{AD}-\widehat{AB}=\widehat{DC}$, tehát a $D$ körül $DC$ sugárral írt $k_2$ kör szintén $E$-ben metszi $k$-t.




*3. ábra*

Így $EDA\sphericalangle=BDA\sphericalangle=FDA\sphericalangle$ és $EAD\sphericalangle=CAD\sphericalangle=FAD\sphericalangle$, tehát az $AE$ egyenes az $AF$-nek, $DE$ a $DF$-nek tükörképe $AD$-re, vagyis $E$ az $F$ tükörképe $AD$-re. Eszerint $AF=AE=AB$ és $DF=DE=DC$; egyszersmind $F$ a $k_1$ és $k_2$-nek második közös pontja. (Az $E$ pont megfelel a szabályos ötszög ötödik csúcsának.) – Az állítás hurkolt négyszögre is érvényes, hacsak $B$ és $C$ a $k$ ugyanazon $AD$ ívének pontjai (4. ábra; a 3-4. ábrákon $A$, $B$, $C$, $D$ egy-egy szabályos 7-, ill. 9-szög csúcsai közül valók).




*4. ábra*

**II. megoldás:** A kívánt egyenlőséget abból bizonyítjuk, hogy az $AFDE$ négyszög paralelogramma. Az I. megoldás szerint a $CDE$ szög $108°$, a $DCA$ szög $72°$, egymásnak kiegészítő szögei. Ámde tudjuk, hogy ha két szög egymást $180°$-ra egészíti ki, és egyik pár száruk párhuzamos – vagy egybeeső –, második száraikba pedig az elsőkből ellentétes irányú forgással jutunk – amint az említett szögek közös $CD$ szárából $DE$-be negatív (az óramutató forgásával egyenlő irányú) forgás visz át, $CA$-ba pedig pozitív –, akkor a második szárak – itt $DE$ és $AC$ – szintén párhuzamosak. Ugyanígy a $BD$ átló párhuzamos az $AE$ oldallal. Az így létrejövő $AFDE$ paralelogrammából $AF = ED$ és $DE = AE$, amit bizonyítani akartunk.

*Megjegyzés.* Számos versenyző szemlélet alapján elfogadta, hogy a szabályos ötszög mindegyik átlója párhuzamos egy oldallal, vagy más szóval, hogy pl. az $ACDE$ négyszög trapéz. Ezt valamivel indokolni kellett volna. Lehet így is: az $ED$ oldal $f$ felező merőlegese szimmetriatengelye az ötszögnek, tehát $A$ és $C$ egymásnak tükörképei $f$-re. Ezért $AC$ merőleges $f$-re, és így párhuzamos $ED$-vel.