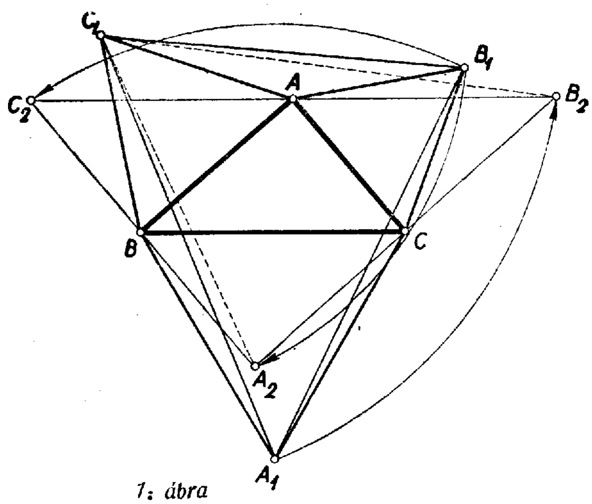
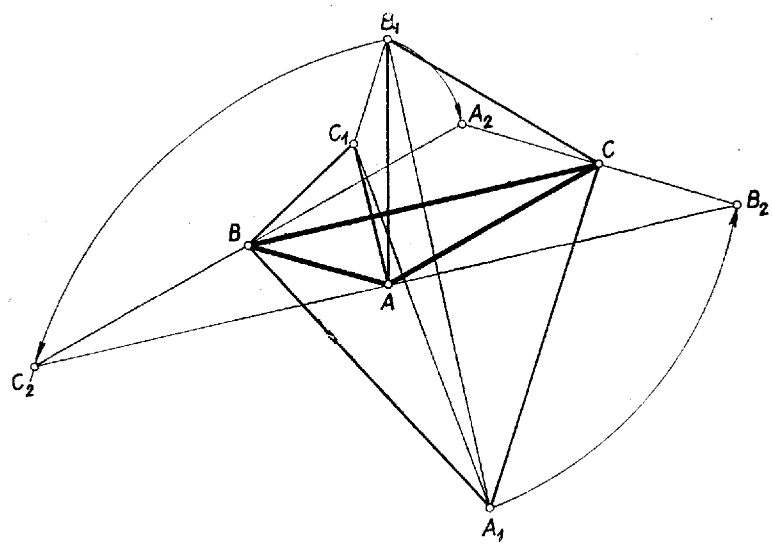
I. megoldás: Szerkesszük meg először valamely ABC háromszöghöz az $A_1B_1C_1$ háromszöget (1. ábra), majd az így nyert ábrát próbáljuk meg úgy kiegészíteni,hogy a szerkesztést visszafelé is elvégezhessük.



1. ábra

A szabályos háromszögek mindegyik szöge 60°-os, ezért célszerűnek látszik 60°-os elforgatásokat alkalmazni. Forgassuk pl. az ábra C_1BA_1 háromszögét a C_1 pont körül befelé (pozitív értelemben), ekkor a 60°-os elforgatással a B pont az A pontba kerül, az A_1 pont elforgatott helyzetét jelöljük B_2-vel. Miután BA_1 szakasz 60°-kal fordult el, párhuzamos helyzetbe került BC-vel, és tekintve, hogy egyenlő is vele, ezért a BCB_2A négyszög paralelogramma. Ha most a C_1AB_1 háromszöget forgatjuk el ugyancsak befelé (ezúttal negatív értelemben) a C_1 pont körül, a $BACA_2$ paralelogrammát nyerjük (A_2-vel B_1 pont elforgatott helyzetét jelöltük). Miután a két paralelogramma közös oldala AB, egy további közös csúcsuk C, így az A_2, B_2 és C pontok egy egyenesbe esnek és C az A_2B_2 szakasz felezőpontja. A_2 és B_2 az adatokból megszerkeszthető, tehát ezekkel együtt C pont is, végül ugyanezzel az eljárással, amivel C-t nyertük, megszerkeszthetjük A-t és B-t. A szerkesztéssel arra jutunk, hogy a keresett ABC háromszög csúcspontjai az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai fölé befelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcspontjai által alkotott $A_2B_2C_2$ háromszög oldalainak felező pontjai.

A szerkesztés szerint a kitűzött feladat látszólag minden esetben egyértelműen megoldható. Ennek ellentmond a 2. ábrán bemutatott helyzet, amellyel az $A_1B_1C_1$ háromszögből kiindulva kapunk ugyan ABC háromszöget, de A_1, B_1 és C_1 nem az oldalakra kifelé, hanem a befelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcspontja.



2. ábra

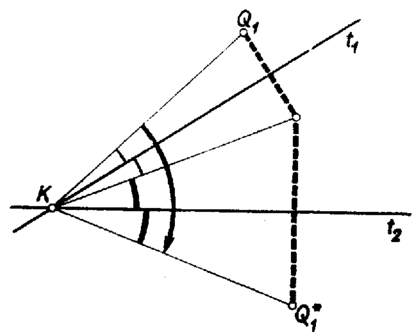
Ezen az ábrán azonban az $A_1B_1C_1$ háromszög nem hegyesszögű; vegyük észre továbbá azt is, hogy az $A_2B_2C_2$ háromszög körüljárási értelme ellentétes az $A_1B_1C_1$ háromszögével.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük a következőket. A feladat megoldhatóságának az a feltétele, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai fölé befelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsai által alkotott $A_2B_2C_2$ háromszög körüljárási értelme megegyezzék az $A_1B_1C_1$ háromszög körüljárási értelmével. (ABC körüljárási értelme mindig megegyezik $A_2B_2C_2$ körüljárási értelmével.) Az eredeti értelmezés szerint sohasem kapunk megoldást, ha az $A_1B_1C_1$ háromszögnek van 120°-osnál nagyobb szöge, és a fennmaradó esetekben mindig kapunk megoldást, ha az $A_1B_1C_1$ háromszögnek nincs 30°-osnál kisebb szöge.

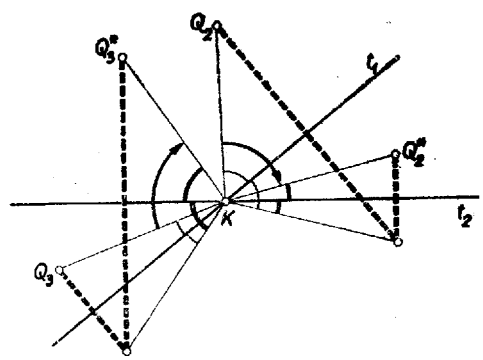
II. megoldás: A keresett háromszög C csúcsát pl. az jellemzi, hogy alkalmas irányban (C-től A felé) B_1 körül 60°-kal elforgatva, majd C_1 körül ugyanilyen irányban 60°-kal forgatva és végül A_1 körül ugyancsak 60°-kal elforgatva visszakerül eredeti helyzetébe.

Megmutatjuk, hogy ha ugyanezeket a forgatásokat a sík egy tetszés szerinti P pontjára alkalmazzuk, akkor a pont a kiindulási helyzetéből a második forgatás utáni helyzetbe átvihető egy alkalmas pont körüli 120°-os forgatással, a harmadik forgatás utáni helyzetébe pedig egyetlen alkalmas 180°-os forgatással, ahol ezek a forgatások egy-egy csak az A_1, B_1 és C_1 pontoktól függő középpont körül történnek.

A bizonyításhoz azt fogjuk felhasználni, hogy egy K pont körül α szöggel történő elforgatás eredményét úgy is megkaphatjuk, ha húzunk a K ponton át tetszés szerint két egyenest, t_1-et és t_2-t úgy, hogy a t_1-től a t_2-ig a forgatás irányában $\alpha/2$ nagyságú szög legyen és minden pontot tükrözünk először t_1-re, azután t_2-re. Fordítva: két ilyen tükrözés eredménye egy K körüli α nagyságú elforgatással is megkapható (3–4. ábrák).

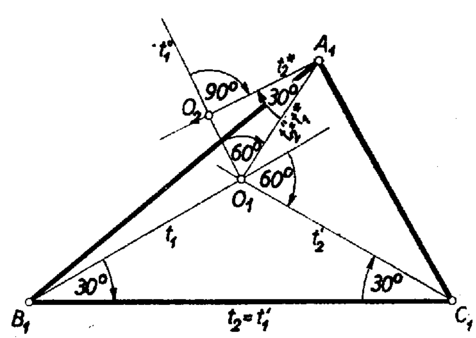


3. ábra



4. ábra

A B_1 körüli forgatást állítsuk elő úgy két tükrözés segítségével, hogy a második tükrözés t_2 tengelyéül a B_1C_1 egyenest választjuk, a C_1 körüli forgatást pedig úgy, hogy az első tükrözés t_1' tengelyéül választjuk B_1C_1-et (5. ábra).



5. ábra

Ekkor egy tetszés szerinti pont a kétszeri forgatás után ugyanoda kerül, mintha tükrözzük a pontot t_1-re, a kapott pontot $t_2(=B_1C_1)$-re, az így nyert pontot $t_1'(=B_1C_1)$-re, majd az újabb tükörképet t_2'-re. A B_1C_1 egyenesre történő kétszeri tükrözés azonban visszaviszi a pontot az e tükrözések előtti helyzetébe, s így az első két forgatás eredménye ugyanaz, mintha tükrözzük a sík pontjait t_1-re, majd t_2'-re. Ennek a két tükrözésnek pedig ugyanaz az eredménye, mintha a két egyenes O_1 metszéspontja körül végzünk $(t_1, t_2') = 60°$ kétszeresényi, azaz 120°-os elforgatást. Ezután még A_1 körül kell 60°-kal forgatni.

Ezeket a forgatásokat is állítsuk elő tükrözésekkel úgy, hogy két egymásutánt tükrözés tengelye O_1A_1 legyen. Ekkor az O_1-en átmenő első tükrözési tengelyhez t_1''-höz 60°-kal kell elforgatva lennie O_1A_1-nek, az A_1-en átmenő második tükrözés t_2^* tengelye pedig 30°-kal lesz elforgatva O_1A_1-hez képest. A négy egymásutáni tükrözés – és ezzel együtt a B_1, C_1, majd A_1 körüli 60°-os elforgatások – végeredménye ekkor ugyanaz, mintha tükrözünk a t_1'' egyenesre, azután t_2^*-ra. E két egyenes metszéspontját O_2-vel jelölve $A_1O_1O_2$ egy 30°, 60°, 90°-os szögekkel rendelkező háromszög, így a három forgatás egymásutáni elvégzésével minden pont ugyanoda kerül, mintha O_2 körül forgatnánk el 180°-kal, azaz tükröznénk az O_2 pontra.

Azt a C pontot kerestük, amely a tárgyalt 3 forgatás, vagy ami ugyanarra az eredményre vezet, az O_2-re történő tükrözés után eredeti helyére kerül vissza, ilyen pont pedig egyedül O_2. A fenti gondolatmenet szerkesztési eljárást is ad $C = O_2$ megszerkesztésére. Az ABC háromszög további csúcsai ugyanezen a módon szerkeszthetők, vagy megszerkeszthetjük C ismeretében a BCA_1 és CAB_1 egyenlőoldalú háromszögeket.