I. megoldás: A keresett négyzetszámot n^2-tel jelölve feltehetjük, hogy n pozitív egész, mert egy számnak és a negatívjának ugyanaz a négyzete. Mivel n^2 hatjegyű, így

$$317 \leqq n \leqq 999.$$

Az n^2 utolsó két jegyéből alakított számot a-val jelölve, a feladat feltételei szerint

$$n^2 = 10\ 000(100 - a) + 100a + a = 1\ 000\ 000 - 9899a.$$

Itt 9899 törzstényezős felbontása $19 \cdot 521$ s így az utolsó tagot fejezve ki a nyert egyenletből

$$19 \cdot 521a = 1\ 000\ 000 - n^2 = (1000 + n)(1000 - n). \tag{1}$$

Tudjuk, hogy egy szorzat csak úgy lehet osztható egy törzsszámmal, ha már valamelyik tényező is osztható a törzsszámmal. Ezt az 521-re alkalmazva az első tényezőre

$$1317 \leqq 1000 + n \leqq 1999,$$

s így csak akkor lehet 521-gyel osztható, ha $3 \cdot 521 = 1563$-mal egyenlő; a második tényező pedig csak úgy, ha 521-gyel egyenlő. Az első esetben

$$n = 563 \qquad n^2 = 316\ 969 \tag{2}$$

kielégíti a feladat feltételeit, a második esetben $a = 479$, $1000 + n = 1479 = 3 \cdot 17 \cdot 29$ nem osztható 19-cel, s így (1) nem teljesülhet. A feladatnak tehát egy megoldása van, a (2) alatti.

Megjegyzés: Néhányan a négyzetszám első két jegyéből álló b számból indultak ki. Az erre nyerhető $n^2 = 9899b + 10\ 100$ egyenletből legfeljebb akkor sikerül további következtetéseket levonni, ha észreveszi valaki, hogy 10 100 egy négyzetszám és egy 521-gyel osztható szám összegére bontható:

$$10\ 100 = 16 \cdot 521 + 42^2$$

s így

$$(n + 42)(n - 42) = 521(19b + 16).$$

Ez az észrevétel azt mutatja, hogy néha még a jelölések szerencsés megválasztása is lényeges lehet egy feladat megoldásában.

Többen abból indultak ki, hogy mik fordulhatnak elő négyzetszám utolsó két jegyeként, de szintén nem jutottak eredményre. Kétségtelenül hosszadalmasabb ez az út a fenti megoldásnál, de járható, mint a következő megoldás mutatja:

II. megoldás: Egy szám négyzetének utolsó két jegye csak a szám utolsó két jegyétől függ, más szóval, ha két szám 100-zal osztható számban különbözik, akkor a négyzetük is, mert

$$(100a + b)^2 = 10\ 000a^2 + 200ab + b^2 = 100(100a + 2ab) + b^2.$$

Elég tehát a 0-tól 100-ig terjedő számok utolsó két jegyét vizsgálni. De már a 0-tól 50-ig tartó számok végződése is kiad minden végződést, 50-en fölül csak ismétlődnek sorra ugyanazok a végződések, mert

$$(50 + a)^2 = 2500 + 100a + a^2 = 100(25 + a) + a^2,$$

sőt már 50-ig is párosan fordulnak elő a végződések: a 25-re szimmetrikusan elhelyezkedő számok négyzetének utolsó két jegye megegyezik. Valóban egy x számmal a 25-re nézve szimmetrikusan az $50 - x$ szám helyezkedik el és

$$(50 - a)^2 = 2500 - 100a + a^2 = 100(25 - a) + a^2.$$

A négyzetszámok lehetséges végződéseit (utolsó két jegyét) tehát megkapjuk, ha 0-tól 25-ig nézzük meg a számok négyzetének utolsó két jegyét. Így a következő végződések adódnak:

00 01 04 09 16 21 24 25 29 36 41 44 49 56 61 64 69 76 81 84 89 96.

Ezek mindegyikéhez elkészíthetjük a feladatban leírt számot és négyzetgyök-vonással eldönthetjük, hogy az négyzetszám-e vagy sem. Valamivel azonban még megkönnyíthetjük a számolást: Egy páros szám négyzetének 2 páros hatványával, egy 3-mal osztható szám négyzetének 3 páros hatványával kell oszthatónak lennie. Ismeretes, hogy minden páratlan szám négyzete $8k + 1$ alakú. Könnyen belátható, hogy 3-mal nem osztható szám négyzete mindig $3k + 1$ alakú, tehát négyzetszám $3k + 2$ alakú nem lehet és hasonló megszorításokat megállapíthatunk más prímszámokkal kapcsolatban is.

A felsorolt végződések elsője és utolsója elesik, mert azokhoz képezve a feladat kikötéseit teljesítő számot nem 6-jegyű számhoz jutunk. A 01-hez, 09-hez, 25-höz, 41-hez, 49-hez, 81-hez és 89-hez tartozó számok 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul és így nem lehetnek négyzetszámok, a 24-hez és 56-hoz tartozó pedig azért nem, mert 8-cal osztható, de 16-tal nem. A 3-mal, illetőleg 9-cel való oszthatóságot nézve a 04-hez, a 16-hoz, 61-hez és a 76-hoz tartozó számok 3-mal osztva 2-t adnak maradékul, a 29-hez és a 64-hez tartozó szám pedig osztható 3-mal, de 9-cel nem, tehát ezek sem négyzetszámok. A maradó számok közül a 21-hez tartozó osztható 11-gyel, de 121-gyel nem, a 36-hoz tartozó pedig osztható 7-tel, de 49-cel nem. A maradó három számból (a 44-hez, 69-hez és 84-hez tartozóból) négyzetgyököt vonva ezúton is azt találjuk, hogy a 316 969 szám az egyetlen, amelyik megfelel a feladat feltételeinek.