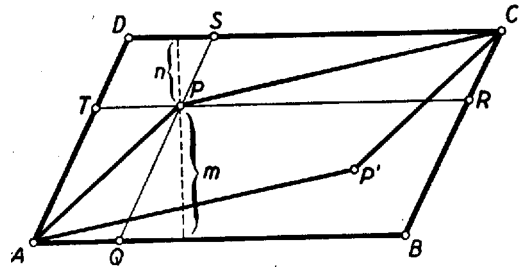
I. megoldás: A megoldók egy része számítással igazolta az állítás helyességét. Bemutatunk egy ilyen megoldást. Legyen a P pont távolsága az AB és CD oldaltól m, ill. n (1. ábra).



1. ábra

Az $APCP'$ paralelogramma t területét megkapjuk, ha az $ABCD$ paralelogramma területéből elhagyjuk az $ABCP'$ és $APCD$ négyszögek területét.

Az utóbbi két terület egyenlő, mert az idomok egymás tükörképei az $ABCD$ paralelogramma középpontjára nézve, így elegendő pl. az $APCD$ négyszög területének kétszeresét vonni le. Ezt a négyszöget az APT és PCS háromszögekre, továbbá a $PSDT$ paralelogrammára bontva, azt kapjuk, hogy

$$t = AB \cdot (m+n) - AQ \cdot m - QB \cdot n - 2AQ \cdot n = (AQ+QB)(m+n)-$$
$$-AQ \cdot m - QB \cdot n - 2AQ \cdot n = QB \cdot m - AQ \cdot n.$$

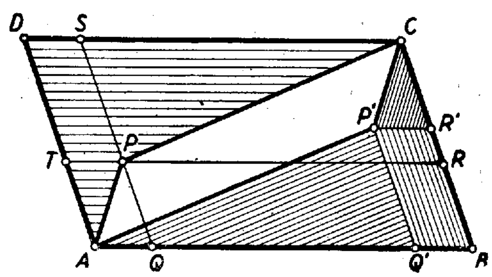
Itt a kisebbítendő a $PRBQ$ paralelogramma területét, a kivonandó pedig a $PSDT$ paralelogrammáét adja. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés. Az ábrán P az ACD háromszögben van. Ez esetben az $APCD$ négyszög konkáv. Ha az ABC háromszögben levő P pontból indulunk ki, akkor számításunk negatív jellel adja a kiszámítandó paralelogramma területét, annak megfelelően, hogy az említett négyszög ez esetben konvex, és tükörképével együtt kétszeresen fedi az $APCP'$ paralelogrammát.

Számítás nélkül, közvetlenül is belátható a feladatban szereplő területek egyenlősége. A következőkben erre mutatunk két utat.

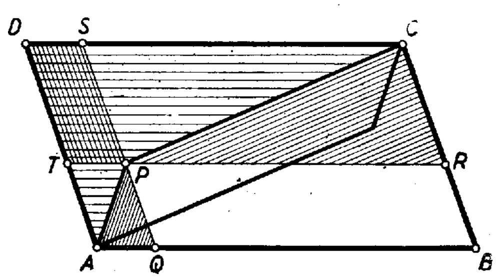
II. megoldás: Húzzunk P' ponton át AB-vel és BC-vel párhuzamos egyenest, és messék ezek BC-t, ill. AB-t az R' és Q' pontban.

Az $APCP'$ paralelogrammát körülzáró két konkáv négyszög egyikét, pl. az $AP'CB$ négyszöget vágjuk szét az $AP'Q'$ és $P'CR'$ háromszögre, valamint a $P'R'BQ'$ paralelogrammára (2. ábra).



2. ábra

Fedjük le az $AP'Q'$ háromszöggel a PCR háromszöget. ($AP'Q'\triangle = PCR\triangle$, mert $AP' = PC$ és a két háromszög szögei egyenlők.) Továbbá a $P'CR'$ háromszöggel lefedjük APQ háromszöget, a $P'R'BQ'$ paralelogrammával pedig a $PTDS$ paralelogrammát (3. ábra).

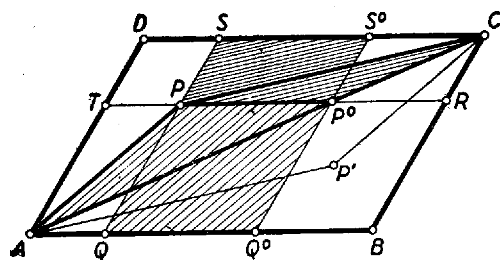


3. ábra

Ezek után az $ABCD$ paralelogrammából a két konkáv négyszöggel lefedetlen marad a $PRBQ$ paralelogramma, kétszeresen fedett a $PSDT$ paralelogramma. Ezért

$$T_{APCP'} = T_{PRBQ} - T_{PSDT}$$

III. megoldás: Messe a TR egyenes az AC átlót a P° pontban. Húzzunk P° ponton át AD-vel párhuzamos egyenest, mely AB-t Q°-ban, CD-t pedig S°-ban metszi (4. ábra).



4. ábra

Kimutatjuk, hogy az $APCP'$ paralelogramma területe egyenlő a $QQ^\circ S^\circ S$ paralelogramma területével, és ugyanezzel egyenlő a $PQBR$ és $PSDT$ paralelogrammák területének különbsége is.

$PP^\circ C\triangle$ területe fele a $PP^\circ S^\circ S$ paralelogramma területének, mert PP° oldaluk és ehhez tartozó magasságuk megegyezik. Hasonló okból $PP^\circ A\triangle$ területe fele a $PP^\circ Q^\circ Q$ paralelogramma területének. Eszerint az $APCP'$ paralelogramma területe, mely az $APC\triangle$ területének kétszerese, valóban egyenlő a $QQ^\circ S^\circ S$ paralelogramma területével.

Ismeretes továbbá, hogy

$$T_{P^\circ S^\circ DT} = T_{P^\circ Q^\circ BR}.$$

De

$$T_{P^\circ S^\circ DT} = T_{PSDT} + T_{P^\circ S^\circ SP},$$

és

$$T_{P^\circ Q^\circ BR} = T_{PQBR} - T_{P^\circ PQQ^\circ}.$$

E három egyenlet alapján

$$T_{PQBR} - T_{PSDT} = T_{P^\circ S^\circ SP} + T_{P^\circ PQQ^\circ} = T_{QQ^\circ S^\circ S},$$

és ezzel állításunk második részét is bebizonyítottuk.

Ha (az ábrától eltérőleg) a P pont az $ABC\triangle$ belsejébe esik, akkor az előbbi gondolatmenettel arra jutunk, hogy

$$T_{APCP'} = T_{QQ^\circ S^\circ S} = T_{PSDT} - T_{PQBR}.$$

Megemlítjük, hogy egyes versenyzők a területeket szerkesztéssel négyzetekké alakították, és ezeket hasonlították össze. Területek szemlélettel, vagy méréssel történő összehasonlítása nem tekinthető bizonyító erejűnek!