I. megoldás: A feladat feltételei szerint a, b és c ugyan ismeretlenek, de fennállnak köztük bizonyos (ismertnek feltételezett) m és n értékkel az

$$a=\frac{b+c}{m},\quad b=\frac{c+a}{n}$$

összefüggések, és meg kell határozni az $a+b$ arányát c-hez. E célból kíséreljük meg a-t és b-t kifejezni c-vel. Az egyenleteket így írhatjuk:

(1) $$ma-b=c,\quad -a+nb=c.$$

Innen b-t, illetőleg a-t kiküszöbölhetjük, ha az első egyenlet n-szeresét a másodikhoz adjuk, illetőleg az első egyenletet a második m-szereséhez adjuk:

(2) $$(mn-1)a=(n+1)c,\quad (mn-1)b=(m+1)c$$

e kettő összegéből, ha $mn\neq 1$, a keresett arány

$$\frac{a+b}{c}=\frac{m+n+2}{mn-1}.$$

Ha $mn=1$, de m és n közül valamelyik nem -1, akkor a (2) egyenletekből következik, hogy $c=0$, s így ez esetben a kérdésnek nincs értelme.

Ha végül $m=n=-1$, akkor mindkét (1) alatti egyenlet az

$$a+b+c=0$$

egyenletbe megy át, és innen, ha $c\neq 0$,

$$\frac{a+b}{c}=-1$$

adódik.

Megjegyzés. A feladat megoldását az tette lehetővé, hogy az a, b, c ismeretlenekre csak két elsőfokú egyenlet áll fenn, és ezekben nem fordul elő az ismeretlent nem tartalmazó tag. – Az ilyen egyenleteket homogén elsőfokú egyenleteknek szokás nevezni. – Egy ilyen egyenletekből álló egyenletrendszernek mindig megoldása a csupa 0-ból álló értékrendszer. Ha van ettől különböző megoldás (és esetünkben van, mert kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlenek száma), akkor az egyenletrendszer legfeljebb valamelyik ismeretlennek a többihez való arányait határozza meg (ezt sem föltétlenül egyértelműen). Esetünkben pl. lényegében az $\frac{a}{c}$ és $\frac{b}{c}$ arányokat határoztuk meg.

II. megoldás: Jelöljük a keresett arányt x-szel, akkor m, n és x között keresünk egy (a-tól, b-től és c-től független) összefüggést. Ha ez sikerül, abból x-et már kifejezhetjük. Az m, n és x-re fennáll

(1) $$m=\frac{b+c}{a},\quad n=\frac{c+a}{b},\quad x=\frac{a+b}{c}.$$

Az egyenletek szimmetriáját a, b és c-ben még világosabbá tehetjük, ha mindegyik egyenlőséghez hozzáadunk 1-et:

$$m+1=\frac{a+b+c}{a},\quad n+1=\frac{a+b+c}{b},\quad x+1=\frac{a+b+c}{c}.$$

Innen, ha m, n és x egyike sem -1, akkor

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1,$$

amiből x-re az

$$x=\frac{m+n+2}{mn-1}$$

érték adódik, ha $mn\neq 1$.

Ha $mn=1$, akkor az (1) alatti első két egyenlet szorzatából

$$1=\frac{ab+c(a+b)+c^2}{ab}=1+\frac{c(a+b+c)}{ab}$$

Innen, mivel feltettük, hogy a, b, c egyike sem 0, következik, hogy

(2) $$a+b+c=0,$$

s így

$$m=n=x=-1.$$

Ugyancsak a (2) egyenlethez jutunk, ha m, n és x közül csak egyről tesszük fel, hogy értéke -1.