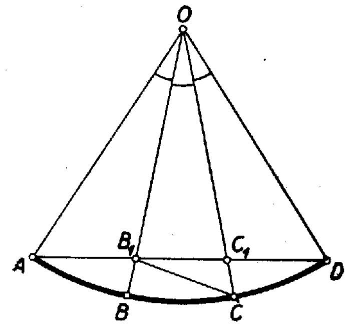
I. megoldás: Jelöljük OB-nek, ill. OC-nek az AD-vel való metszéspontját B_1-gyel, ill. C_1-gyel (1. ábra).



1. ábra

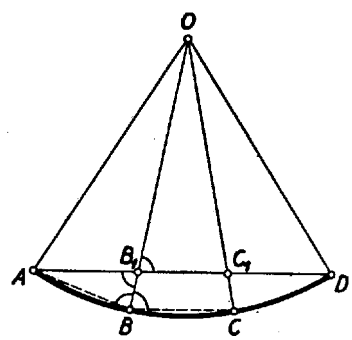
A körívet harmadoló pontokhoz húzott sugarak az O-nál levő középponti szöget is három egyenlő részre osztják. Húzzuk meg a CB_1 szakaszt. Az így keletkezett OCB_1 háromszög egybevágó az OAB_1, háromszöggel, mert annak OB-re vonatkozó tükörképe, ugyanis az OA és OC sugarak egyenlő szöget zárnak be OB-vel.

Ha megmutatjuk, hogy a B_1C_1C háromszögben a C_1-nél levő szög tompaszög, s így a háromszög legnagyobb szöge, ebből következni fog, hogy B_1C a háromszög leghosszabb oldala; ennek következtében B_1C_1 kisebb B_1C-nél, tehát az utóbbival egyenlő AB_1-nél is. A két sugár a húrt ezek alapján nem osztja egyenlő részekre.

A B_1C_1C szög azonban az egyenlő szárú OB_1C_1 háromszög két egyenlő szöge közül az egyiknek, tehát mindenképpen egy hegyesszögnek a kiegészítő szöge, s így valóban tompaszög. Ezzel, mint láttuk, a feladatot meg is oldottuk.

Szimmetria okokból világos, hogy a C_1D szakasz az AB_1-gyel egyenlő.

II. megoldás: Jelöljük ismét B_1-gyel és C_1-gyel az OB és OC körsugarak metszéspontját az AD húrral (2. ábra).



2. ábra

Az OB sugár az ABC szög szögfelezője, $ABB_1\sphericalangle = B_1BC\sphericalangle$. Az AOD szög szögfelezőjére a B_1 és C_1, valamint a B és C pontok tükrös helyzetűek, így B_1C_1 párhuzamos BC-vel, tehát $B_1BC\sphericalangle = OB_1C_1\sphericalangle$. Az utóbbi szög csúcsszöge: AB_1B szög eszerint az ABB_1 szöggel egyenlő. Az ABB_1 háromszög tehát egyenlő szárú, s ezért $AB_1 = AB$. Az AB mint ugyanakkora középponti szöghöz tartozó húr a BC húrral egyenlő. A BOC szög szárait metsző B_1C_1 és BC párhuzamos szakaszok közül a távolabbi BC a hosszabb. Így az utóbbival egyenlő AB_1 szakasz hosszabb, mint B_1C_1.

Megjegyzések: 1. Azok számára, akik már ismerik egy háromszög szögfelezőjének osztásarányára vonatkozó tételt (ált. gimn. II. oszt. tananyag), közöljük a feladatnak következő egyszerű megoldását.

Az OAC_1 háromszögnek az OB_1 szögfelezője. A szögfelezők osztásarányára vonatkozó tétel alapján

$$AB_1 : B_1C_1 = AO : C_1O.$$

Mivel C_1O feltétlenül kisebb, mint a kör sugara, ami AO-val egyező nagyságú, ezért AB_1 és B_1C_1 közül a B_1C_1 a kisebb.

2. Ha a bizonyítottakkal ellentétben az ívet harmadoló sugarak az ívhez tartozó húrt is harmadolnák, ez lehetőséget adna egy szög harmadolására körzővel és vonalzóval, ami pedig lehetetlen (l. pl. Középisk. Mat. Lapok XIV. köt. 4. és 5. sz. 97–107. és 129–134. o.). – Sok versenyző a szögharmadolás lehetetlenségére hivatkozva cáfolta meg a keletkező szakaszok egyenlőségét. Ez a megoldás természetesen jó, de a fenti bizonyításoknál összehasonlíthatatlanul nehezebben bizonyítható, mélyebben fekvő tételt használ fel egy ilyen egyszerű feladat megoldására.