

I. megoldás: Kiszöböljük ki (1) segítségével (2)-ből z -t. Rendezve és 2-vel osztva

$$x^2 + xy + y^2 - 12x - 12y = 43.$$

x^2 -tel szorozva, és a (3) egyenletet felhasználva az

$$(4) \quad x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 180x + 225 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek az első két tagja megegyezik az $x^2 - 6x$ kifejezés négyzetének első két tagjával; utolsó két tagja pedig a $6x + 15$ (vagy $-6x - 15$) négyzetének utolsó két tagjával. Mind a négy tag előfordul tehát az $x^2 - 6x - 15$ polinom négyzetében. Az egyenlet baloldala tehát így alakítható át:

$$(x^2 - 6x - 15)^2 - 64x^2 = (x^2 - 14x - 15)(x^2 + 2x - 15).$$

x -re tehát 4 értéket kapunk: az

$$x^2 - 14x - 15 = 0 \quad \text{és az} \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

egyenletek gyökei: $x = 15, -1; 3, -5$. Minden x -hez y -t a (3) és z -t az (1) egyenletből egyértelműen meghatározhatjuk, A lehetséges megoldások

| | I. | II. | III. | IV. |
|-------|-----|-----|------|-----|
| $x =$ | 15, | -1, | 3, | -5, |
| $y =$ | -1, | 15, | -5, | 3, |
| $z =$ | -2, | -2, | 14, | 14. |

Ezek könnyen láthatólag (2)-t kielégítik.

Megjegyzés: Próbálgatással hamar rátalálunk a (4) egyenletnek a -1 gyökére. Másrészt x és y szimmetrikus szerepe miatt ugyanennek az egyenletnek tesznek eleget y gyökei is. Kell tehát, hogy a -1 -hez (3)-ból adódó $y = 15$ érték is gyöke legyen az egyenletnek, ami így is van. Ennek alapján is eljuthatunk az egyenletnek a fenti megoldásban használt felbontásához.

II. megoldás: Az (1) egyenlet négyzetéből levonva a (2)-t, és (3) kétszeresét, majd 2-vel osztva az

$$(5) \quad (x + y)z = -28$$

egyenlethez jutunk: A z és $x + y = u$ ismeretlenekre tehát az

$$(5') \quad u + z = 12$$

$$(1') \quad uz = -28$$

egyenletek állnak fenn. Így z és u a

$$v^2 - 12v - 28 = 0$$

egyenlet két gyöke, bármilyen sorrendben. Mivel $v_1 = 14$ és $v_2 = -2$, azért x és y az

$$x + y = 14, \quad xy = -15 \quad \text{vagy} \quad x + y = -2, \quad xy = 15$$

egyenletrendszernek tesznek eleget. Ezek a fentebb már szerepelt

$$t^2 - 14t - 15 = 0, \quad \text{ill.} \quad t^2 + 2t - 15 = 0$$

egyenletekre vezetnek (ott t helyett x -szel jelöltük az ismeretlent), s így az előbbi megoldásban talált gyökökhöz jutunk. Ezek kielégítik az (1), (3), (5) egyenleteket. Mivel azonban ezekből (2) következik [ha (1) négyzetéből levonjuk (3) és (5) kétszeresét], azért kielégítik az eredetileg adott egyenletrendszert is.