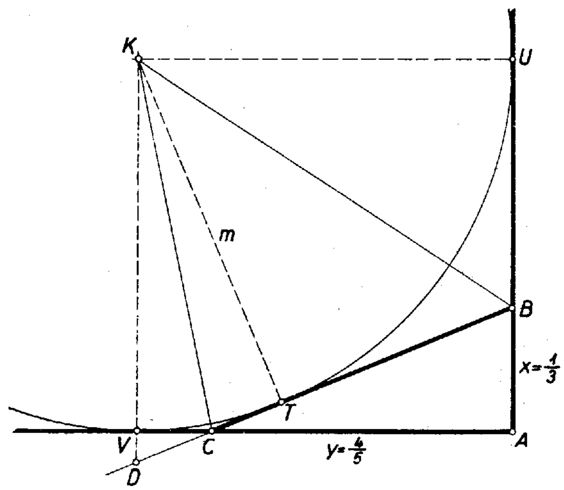
I. megoldás: Válasszuk a négyzet oldalának felét mértékegységül. Legyenek a négyzet A csúcsából induló oldalakon a beírt kör érintési pontjai U, V, a kör középpontja K, az AU szakaszon $AB=\frac{1}{3}$, az AV-n $AC=\frac{4}{5}$ (2. ábra).



2. ábra

Azt kell megmutatni, hogy BC távolsága K-tól 1, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy a BCK háromszög K-ból húzott $KT=m$ magassága egységnyi. Ezt a magasságot a háromszög területének meghatározásán keresztül számíthatjuk ki könnyen. Az ABC, BKU, CKV háromszögek területei rendre

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5},\qquad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10},$$

és így a BCK háromszög t területére

$$t=1-\frac{2}{15}-\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{13}{30}.$$

Pythagoras tételével kiszámítva a BC oldalt

$$BC^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{25+144}{9\cdot 25}=\left(\frac{13}{15}\right)^2,\quad \text{azaz}\quad BC=\frac{13}{15}.$$

Így

$$m=\frac{2t}{BC}=1.$$

És ez volt a bizonyítandó.

II. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használjuk. Legyen KV és BC metszéspontja D (2. ábra). Kiszámíthatjuk KT-t hasonló háromszögekből is. Az ABC és TDK háromszögek hasonlók, így

$$\frac{KT}{KD}=\frac{C_A}{C_B}. \tag{1}$$

BC-re, mint az előző megoldásban, Pythagoras tétele segítségével $13/15$ adódik. Mivel az ABC és VDC háromszögek is hasonlók, azért

$$\frac{VD}{VC}=\frac{AB}{AC},\quad \text{amiből}\quad VD=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{12},$$

és így (1)-ből

$$KT=\frac{CA}{CB}\cdot KD=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{13}\cdot\left(1+\frac{1}{12}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{13}\cdot\frac{13}{12}=1.$$

Ezzel az állításunkat igazoltuk.

III. megoldás: Jelöljük a négyzet oldalát a-val, egyébként használjuk az előbbi jelöléseket. A feladatnál általánosabban számítsuk ki, hogy az AU egyenes egy A-tól x távolságban levő B pontjából a négyzetbe írt körhöz húzott érintő mekkora y szakaszt metsz le az AV egyenesből (2. ábra).

Az érintkezés folytán

$$TB=BU=\frac{a}{2}-x,\qquad TC=CV=\frac{a}{2}-y.$$

Így Pythagoras tétele szerint

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} - y\right)^2 = a^2 - 2ax - 2ay + x^2 + y^2 + 2xy,$$

azaz

$$a^2 - 2ax - 2ay + 2xy = 0.$$

Innen y egyértelműen meghatározható x-hez. Az ilyen y távolságban metsző egyenes lehet csak a kör érintője. Mivel pedig B-ből (BU-n kívül) pontosan egy érintő húzható a körhöz, így ez szükségképpen az AV-t $AC = y$ távolságban metsző egyenes lesz.

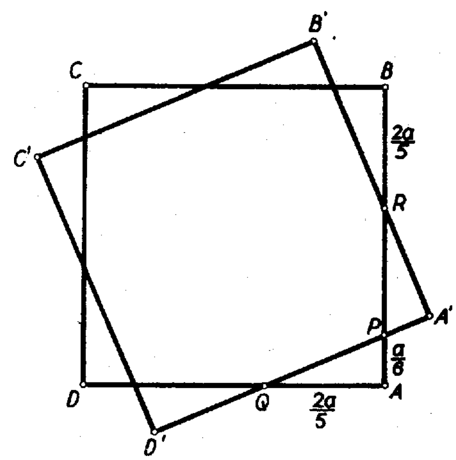
A nyert egyenlet mindkét oldalához a^2-et hozzáadva, a következő áttekinthetőbb alakra jutunk:

$$(q - x)(a - y) = \frac{a^2}{2}.$$

Ez tehát a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az a oldalú négyzet egyik csúcsából induló oldalakat e csúcstól x és y távolságban metsző egyenes érintse a négyzetbe írt kört. Ez $x = \frac{a}{6}$ esetben éppen $y = \frac{2a}{5} = \frac{4a}{10}$-et ad, amivel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés: Az ábránk ugyan csak pozitív, $\frac{a}{2}$-nél kisebb x, y értékekre vonatkozik, de könnyen belátható, hogy tetszés szerinti pozitív vagy negatív értékekre is ugyanez a szükséges és elégséges kritérium adódik, ha az AU-val, illetőleg AV-vel ellentétes irányú szakaszokat tekintjük negatívnak.

IV. megoldás: Mérjük rá egy $ABCD$ négyzet minden csúcsából az egyik oldalra egy irányban körülhaladva az oldal hatodrészét, majd ellenkező irányban körüljárva az oldal $2/5$ részét. Ha az egy-egy csúcshoz közelebb eső osztópontokat összekötjük, egy újabb, az előbbivel közös középpontú $A'B'C'D'$ négyzetet kapunk. Ha megmutatjuk, hogy a két négyzet egybevágó, akkor a beírt körük közös, s így igazolást nyer a feladat állítása (3. ábra).



3. ábra

Az egybevágósághoz elég megmutatni, hogy a négyzetek egymásból egybevágó derékszögű háromszögeket metszenek le. Mivel e háromszögek hasonlósága nyilvánvaló, elég egy oldalpárjukról, pl. az átfogókról megmutatni, hogy egyenlők. Jelöljük a négyzet oldalát a-val. Az A csúcsú derékszögű háromszög átfogójára Pythagoras tételével adódik

$$PQ = \sqrt{\frac{a^2}{3b} + \frac{4a^2}{25}} = \frac{13}{30}a.$$

Viszont az A' csúcsú háromszög átfogója

$$PR = a - \frac{a}{6} - \frac{2a}{5} = \frac{13}{30}a.$$

Ezzel feladatunk állítása igazolást nyert.

Megjegyzés: Ha általában $AP = x$, $AQ = BR = y$, akkor a fenti megoldás azt adja, hogy a két négyzet akkor és csak akkor egybevágó, ha

$$x^2 + y^2 = (a - x - y)^2,$$

és ez megegyezik az előző megoldásban nyert egyenlőséggel. Így az ott levezetett kritériumnak egy kevesebb számolást igénylő származtatásához jutunk.