

**I. megoldás:** Felhasználva, hogy

$$1 + u^2 \geq 2u, \text{ mert } 1 + u^2 - 2u = (1 - u)^2 \geq 0,$$

az egyenlőtlenség bal oldala így alakítható át:

$$\begin{aligned} 1 + a^2 + b^2 &= (1 + a^2)(1 + b^2) - a^2b^2 \geq 2a \cdot 2b - a^2b^2 = \\ &= 3ab + ab(1 - ab) > 3ab, \end{aligned}$$

mivel a feladat feltételei mellett  $ab$  pozitív és 1-nél kisebb. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

**II. megoldás:** Képezzük a két oldal különbségét:

$$1 + a^2 + b^2 - 3ab = (a - b)^2 + (1 - ab).$$

Ha  $ab < 1$ , akkor a jobb oldal nyilván pozitív, vagyis

$$1 + a^2 + b^2 > 3ab.$$

*Megjegyzés:* Mint a II. megoldás mutatja,  $a$ -ról és  $b$ -ről elegendő a feladat követelményei helyett csak annyit tenni fel, hogy szorzatuk 1-nél kisebb. Az I. megoldásban kihasználtuk e szorzat pozitívitasát is, holott negatív szorzat esetén világos az állítás helyessége. Azért érthető ez mégis, mert ott már az átalakítás közben egyenlőtlenségeket alkalmaztunk, s az így „rontott” értéket már kissé nehezebb volt becsülni.