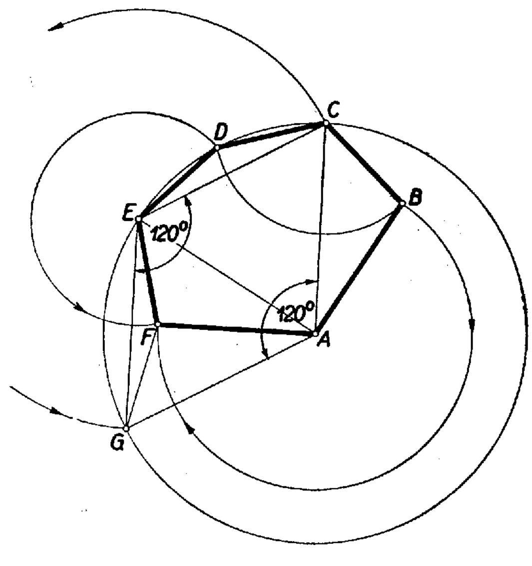
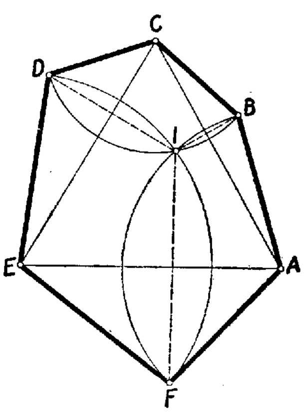
I. megoldás: Legyenek az $ABCDEF$ hatszög A, C és E csúcsoknál levő szögei $120°$-osak. Ekkor a másik három szög összege is $360°$; mert a hatszög szögeinek összege $720°$. Így az ABC háromszöget A körül elforgatva, míg AB a vele egyenlő AF oldalra kerül és hasonlóan a CDE háromszöget E körül ED oldalával EF-re forgatva, a BC és DC oldalak egy egyenesre fognak kerülni (4. ábra), és mivel a két oldal egyenlő, a C csúcs a két forgatásnál ugyanabba a G pontba kerül.



4. ábra

A keletkező AEG háromszög az AEC háromszög tükörképe az AE egyenesre nézve. Az elforgatás folytán keletkezett CAG és CEG szögek $120°$-osak, s így az AE szimmetriatengely az AC és EC oldalakkal $60°$-os szöget zár be, az ACE háromszög tehát szabályos.

II. megoldás: a) Az állítást konvex hatszögre igazoljuk. Az előző megoldás jelöléseit használva rajzoljunk A középpontú körívet F-en és B-n át a ($120°$-os) FAB szög szárai közé és hasonlóan C középpontú kör a BCD szög szárai közé B-n és D-n át. A két körívről az FB, ill. BD szakasz $120°$ alatt látszik, mert a látószögek $240°$-os középponti szöghöz tartozó kerületi szögek. (5. ábra).



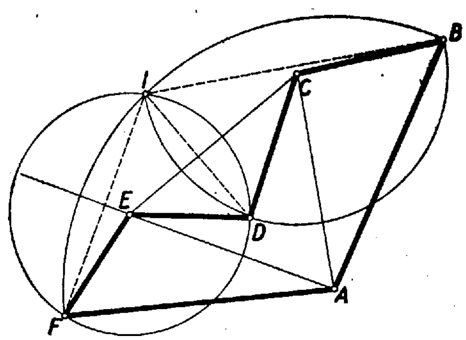
5. ábra

Belátjuk, hogy a két körív metszi egymást. A D pont az FAB $120°$-os szögtérben van, mert a hatszög konvex, továbbá az FB köríven kívül, mert különben az FDB szög legalább $120°$-os volna. Mivel a BCD és DEF egyenlőszárú háromszögek szárai közti szög $120°$, így ezeknek a D-nél levő szárai $30°$-osak, tehát a hatszög D-nél levő szöge $180°$-nál nagyobb volna, de ez lehetetlen, mert a hatszög konvex. Ugyanígy következik, hogy az F pont a BCD $120°$-os szögtérben van, a BD köríven kívül. A BD körív az FAB körcikk belsejébe indul a B pontból, mert az ABC szög a hatszög konvex volta miatt $180°$-nál kisebb. Így a két körív valóban metszi egymást egy I pontban. Ez a pont B tükörképe az AC egyenesre.

Az I pontból, mint láttuk, az FB és BD szakasz $120°$-os szög alatt látszik, s így ugyanakkora szögben látszik a DF szakasz vagyis az E középpontú, D-n és F-en áthaladó kisebb körív is átmegy I-n. Ebből következik, hogy az I pont D-nek is tükörképe a CE egyenesre és F-nek is tükörképe az EA egyenesre.

Az ACE háromszög oldalai a bizonyítottak szerint merőlegesek, az egymással $120°$-os szöget bezáró, IB, ID és IF szakaszokra s így szabályos háromszöget alkotnak.

b) Ha a hatszögben pl. a D csúcsnál levő szög $180°$-nál nagyobb, akkor D az FAB körcikkben van, s így a BD és DF körívek meghosszabbítása metszi az FB ívet egy közös I pontban (6. ábra).



6. ábra

A bizonyítás ez esetben az előbbihez teljesen hasonló módon fejezhető be.