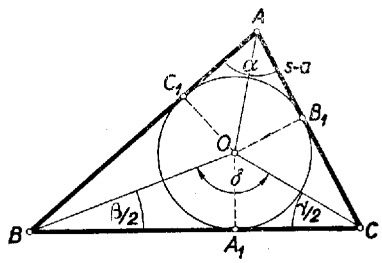
I. megoldás: Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, az ezeknél fekvő szögek α, β, γ. Mivel a beírt kör O középpontját a szögfelező metszéspontja adja, ezért az $a = BC$ oldal látószöge az O pontból (3. ábra)



3. ábra

$$\delta = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

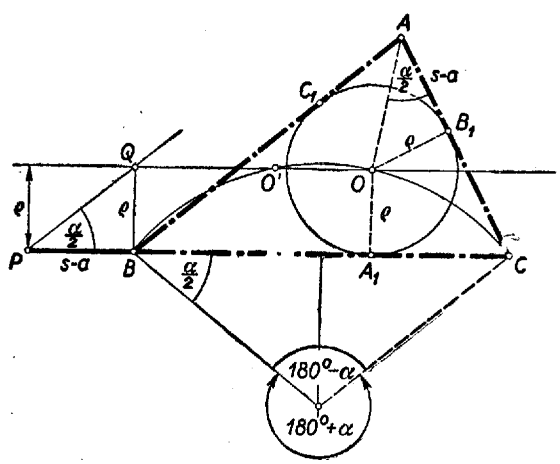
Ez a szög tehát α ismeretében megszerkeszthető. Azt is tudjuk, hogy O a BC oldaltól ϱ távolságra van, így a szerkesztés elvégezhető, ha a-t meg tudjuk szerkeszteni. Legyenek a beírt kör érintési pontjai a BC, CA, AB oldalon A_1, B_1, C_1, akkor ismeretes, hogy

$$AB_1 = AC_1 = s - BC = s - a. \tag{2}$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintő egyenlő volta miatt

$$s = AB_1 + BC_1 + CA_1 = AB_1 + CA_1 + A_1B = AB_1 + a.)$$

Ezzel a következő szerkesztéshez jutottunk: Rajzoljunk $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szöget, csúcspontját jelöljük P-vel (4. ábra).



4. ábra

Húzzunk az egyik szárával párhuzamos egyenest ϱ távolságban, amely metszi a másik szárat egy Q pontban. Az előbbi szárra mérjük rá a P csúcstól a $PC = s$ távolságot, a Q-ból PC-re bocsátott merőleges talppontja legyen B. Rajzoljuk meg azt a körívet, amelyből a BC szakasz $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik. Messe ez az először húzott párhuzamost O és O' pontokban. Rajzoljunk pl. O körül ϱ sugarú kört. Az ehhez B-ből és C-ből húzott érintők A metszéspontja lesz a keresett háromszög harmadik csúcspontja. (E két érintő szükségképpen metszi egymást, a BC ugyanazon az oldalán, amelyen a kör van. Ugyanis ezen érintőknek a BC szakasszal bezárt, a kör oldalán fekvő szögei $2 \cdot OBC\sphericalangle$, illetőleg $2 \cdot OCB\sphericalangle$, és e két szög összege $180^\circ - \alpha$.)

Csak az így kapott háromszög felelhet meg a feladat feltételeinek, tehát nincs megoldása a feladatnak, ha a látókörív nem metszi a ϱ távolságban húzott párhuzamost.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert beírt körének sugara ϱ, ennek a középpontjából a BC oldal $90 + \dfrac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik, s így az A csúcsnál fekvő α' szögre (1) szerint

$$90^\circ + \frac{\alpha'}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \qquad \alpha' = \alpha.$$

Végül a beírt kör érintési pontját a CA oldalon B_1-gyel jelölve, a szerkesztett háromszög s' kerületére (2) szerint

$$s' = AB_1 + BC.$$

De az AOB_1 és PQB derékszögű háromszögek egybevágók, mert A-nál, illetőleg P-nél fekvő hegyesszögük $\frac{\alpha}{2}$, és az ezzel szemközti befogó mindkét háromszögben ϱ. Így

$$AB_1 = PB.$$

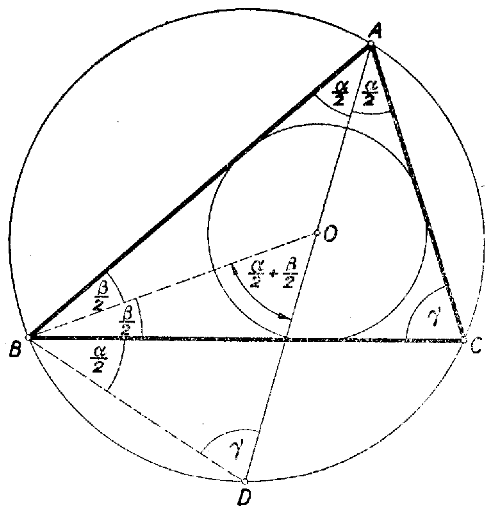
Ennélfogva

$$s' = PB + BC = s$$

a szerkesztés szerint.

Ha O helyett az O'-ből kiindulva fejezzük be a szerkesztést, akkor ABC-vel egybevágó megoldást kapunk, mert O és O' szimmetrikus a BC szakaszt felező merőlegesére.

Megjegyzés. Legyen az ABC háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja D (5. ábra).



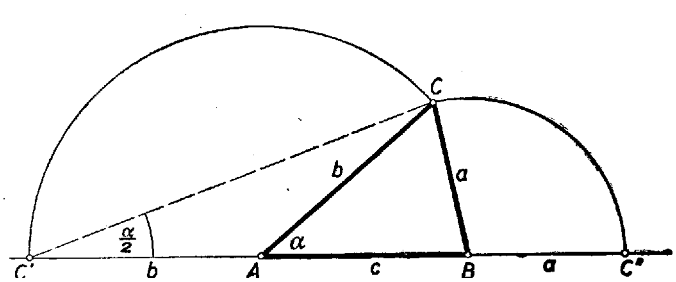
5. ábra

Tudjuk, hogy az A csúcsnál fekvő szög felezője átmegy D-n, és egyszerű szögszámítás adja, hogy a BDO háromszög egyenlő szárú: $DB = DO$. Így B, O és C egy D középpontú körön vannak. Ez éppen a fenti megoldásban használt látókörív.

Mivel a megszerkesztése után, α ismeretében a körülírt kör megszerkeszthető, így a D pont is. E körül B-n és C-n át körívet rajzolva, annak egyik metszéspontját a BC-től ϱ távolságra húzott párhuzamossal kössük össze D-vel. Ez metszi ki a körülírt körből A-t. Többen választották ezt a szerkesztési utat. Ehhez természetesen megfelelően kell módosítani annak bizonyítását is, hogy az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek. (Lásd a jelen számban kitűzött 372. gyakorlatot.)

II. megoldás: Forgassuk le egy ABC háromszög oldalait pl. az AB oldal meghosszabbítására (6. ábra)

$$AC' = AC, \quad BC' = BC.$$

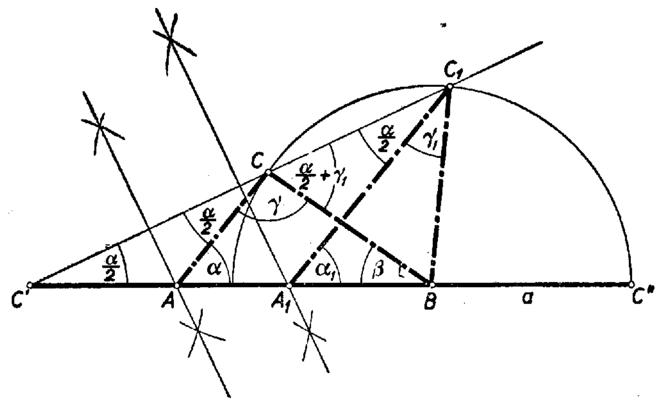


6. ábra

Ha az A csúcsnál levő szög α, akkor a CAC' háromszög egyenlő szárú voltából következik, hogy

$$CC'A\sphericalangle = CC'C''\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Az előző megoldásban láttuk, hogy a $BC=a$ oldal az adatokból megszerkeszthető, így megszerkeszthető a BCC' háromszög is a következő módon: Miután a-t megszerkesztettük, mint az előző megoldásban, mérjük fel egy egyenesre $C'C''=2s$ távolságot, ennek C' végpontjában az $\frac{\alpha}{2}$ szöget, a C''-től a távolságra levő B pont körül pedig rajzoljunk a sugárral kört (7. ábra).



7. ábra

E körnek a szög másik szárával való valamelyik metszéspontja – ha van ilyen – legyen C. A CC' szakasz felező merőlegese metszi ki a $C'C''$ szakaszból az A pontot.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert szerkesztés szerint a CAC' háromszög egyenlő szárú, így $CA=C'A$, és a háromszög A-nál levő külső szöge

$$CAC''\sphericalangle = 2\cdot CC'A\sphericalangle=\alpha.$$

Ez az ABC háromszög belső szöge kell, hogy legyen. Ugyanis a szerkeszthetőséghez szükséges, hogy $a<s$ legyen. Ez esetben C' az a sugarú B középpontú körön kívül van. Ha a kör és a $C'C$ egyenes másik metszéspontját C_1-gyel jelöljük, akkor a CC_1 szakasz felező merőlegese B-n megy át; mivel pedig CC' (és C_1C') felezőpontja C' és a C_1C szakasz felezőpontja közé esik, így A-nak is C' és B közé kell esnie. $CAC''\sphericalangle$ tehát az ABC háromszögnek valóban belső szöge. A háromszög kerülete:

$$CA+AB+CB=C'A+AB+BC''=2s.$$

Így az I. megoldás (1) szerint a beírt kör érintési pontja A-tól $s-a$ távolságra van. Ebből, mivel a beírt kör középpontja az α szög felezőjén van, a megszerkesztése szerint következik, hogy a beírt kör sugara olyan derékszögű háromszög befogója, melynek ezzel szemközti szöge $\frac{\alpha}{2}$, a másik befogója pedig $s-a$. Mivel a-t egy ugyanilyen háromszög segítségével szerkesztettük, melynek emellett kérdéses befogója ϱ hosszúságú, így a megszerkesztett háromszög beírt körének sugara ϱ. A háromszög tehát megfelel a feladat feltételeinek.

Azt állítjuk, hogy ha C helyett C_1-ből kiindulva szerkesztünk egy A_1BC_1 háromszöget, ez az előbbivel egybevágó lesz (a megfelelt csúcsok A, C és B). Valóban A_1 is C' és B közé esik. Essék mondjuk a C a C' és C_1 pontok közé, és jelöljük az ABC és A_1BC_1 háromszögek szögeit α, β, γ, illetőleg α_1, β_1, γ_1-gyel. Szerkesztés szerint $\alpha_1=\alpha$ a megadott szög.

A BCC_1 egyenlő szárú háromszögből

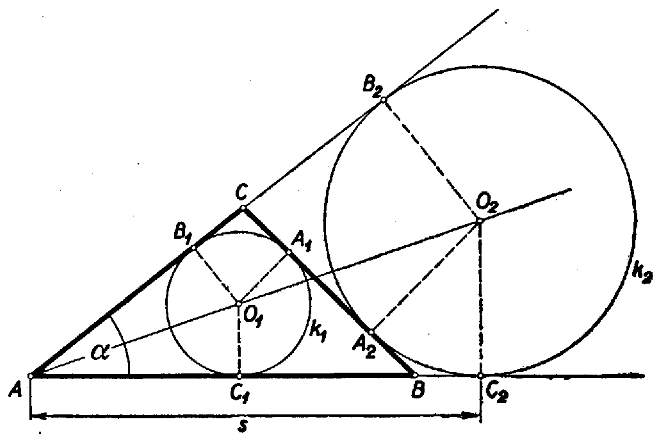
$$BCC_1\sphericalangle=BC_1C\sphericalangle=\gamma_1+\frac{\alpha}{2},$$

így a C-nél keletkező szögek összege

$$180^\circ=C'CA\sphericalangle+ACB\sphericalangle+BCC_1\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}+\gamma+\gamma_1+\frac{\alpha}{2}=\alpha+\gamma+\gamma_1,$$

tehát $\gamma_1=\beta$. Az ABC és A_1C_1B háromszögek tehát hasonlók, mivel pedig BC és C_1B oldaluk egyenlő, tehát egybevágók is.

III. megoldás: Rajzoljuk meg a háromszög BC oldalához hozzáírt kört is. A betűzést a 8. ábra mutatja.



8. ábra

Ismeretes, hogy ekkor

$$AB_2 = AC_2 = s. \tag{3}$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintők egyenlősége folytán

$$2AB_2 = AB_2 + AC_2 = AC + CA_2 + AB + BA_2 = AC + AB + BC = 2s.)$$

Ez a következő szerkesztéshez vezet: Szerkesszünk α nagyságú szöget, csúcsa legyen A, és szerkesszük meg a két szárat érintő ϱ sugarú k_1 kört. Mérjük rá a szög egyik szárára az $AC_2 = s$ távolságot, és szerkesszük meg azt a k_2 kört, amelyik mindkét szárat érinti, egyiket C_2-ben. Húzzuk meg a két kör egyik közös belső érintőjét, messe ez a szög szárait B és C pontokban.

ABC a keresett háromszög, mert A-nál levő szöge α, beírt körének sugara ϱ, és a (3) összefüggésből következik, hogy kerülete $2s$.

A másik belső közös érintő meghúzása nyilvánvalóan a megszerkesztettel egybevágó háromszöghöz vezet.