Képezzük a két oldal különbségét

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2\geq 0,$$

a, b, c, d minden számbajövő értékére. Egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha

$$ad=bc.$$

Megjegyzés. 1. A bizonyítás a következő azonosság levezetésével történt:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Ebből az itt bizonyított egyenlőtlenség mellett egy számelméleti érdekesség is leolvasható: ha itt a, b, c, d egész számokat jelentenek, akkor az azonosság azt fejezi ki, hogy ha két egész szám kifejezhető két négyzetszám összegeként ($m==a^2+b^2$ és $n=c^2+d^2$), akkor a szorzatuknak is megvan ez a tulajdonsága. Ez lényeges segítséget nyújt annak a kérdésnek vizsgálatában, hogy mely számok állíthatók elő két négyzetszám összegeként (lásd idevonatkozóan pl. Matematikai Versenytételek II. részben az 1938. évi 1. feladathoz fűzött jegyzetet).

2. Könnyen igazolható a felhasznált azonosság következő általánosítása:
$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2)-(a_1b_1+a_2b_2\ldots+a_kb_k)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2++(a_1b_3-a_3b_1)+\ldots+(a_1b_k-a_kb_1)+(a_2b_3-a_3b_2)^2+\ldots+(a_kb_{k-1}-a_{k-1}b_k)$,
amiből leolvashatjuk az

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2)+\ldots+b_k^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_2)^2$$

nevezetes Cauchy-féle egyenlőtlenséget. Itt egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a b_i-k a megfelelő a_i-ből minden egyes i-re ugyanazon c számmal való szorzással keletkeznek.