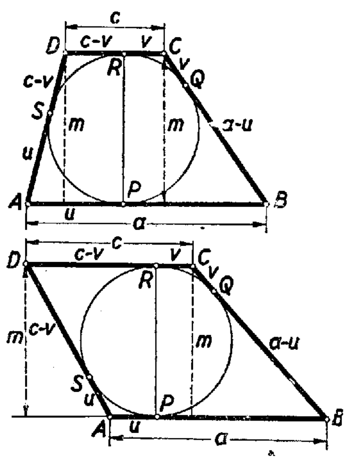
I. megoldás: Jelöljük az AB és CD oldalak hosszát a-val és c-vel, az AB, BC, CD, DA oldalakon levő érintési pontokat P, Q, R, S-sel. Bocsássunk merőlegest a C és D pontokból az AB egyenesre (1. ábra).



1. ábra

Két derékszögű háromszög keletkezik, melyek átfogója a BC, ill. DA oldal, egyik befogója a trapéz m magasságával, másik pedig a BP és CR, illetőleg a DR és AP érintőszakaszok különbségének abszolút értékével egyenlő. Mivel a körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, így

$$BP = BQ = a - u, \; DR = DS = c - v,$$

tehát a derékszögű háromszögekre Pythagoras tételét alkalmazva

$$(a - u + v)^2 = m^2 + |a - u - v|^2,$$
$$(u + c - v)^2 = m^2 + |u - (c - v)|^2.$$

Miután egy számnak és negatívjának a négyzete megegyezik, az abszolútérték-jeleket elhagyhatjuk. A második egyenletet az elsőből levonva az

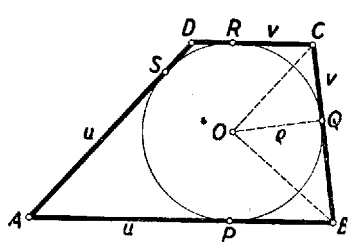
$$[a - (u - v)]^2 - [c + (u - v)]^2 = [a - (u + v)]^2 - [(u + v) - c]^2$$

összefüggéshez jutunk. Ebből a zárójelek felbontása és rendezés után kapjuk, hogy

$$4av = 4cu,$$

ami egyenértékű a bizonyítandó összefüggéssel.

II. megoldás: A beírt kör O középpontja a trapéz szögfelezőinek metszéspontja. Mivel a trapéz B-nél és C-nél levő szögeinek összege $180°$, azért a BOC háromszög B-nél és C-nél levő szögeinek összege $90°$, és így a háromszög O-nál derékszögű (2. ábra).



2. ábra

Az átfogóra bocsátott magasság a beírt kör sugara, ϱ. Így a derékszögű háromszögre vonatkozó középarányossági tételek szerint

$$\varrho^2 = BQ \cdot CQ.$$

Hasonlóan adódik a DOA háromszögből, hogy

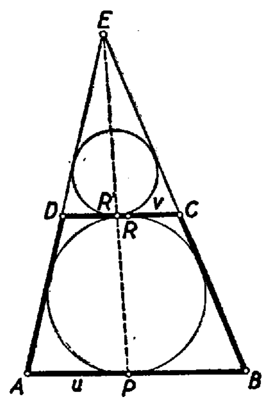
$$\varrho^2 = DS \cdot AS,$$

tehát a jobb oldalak is egyenlők. Felhasználva ezt és azt, hogy körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, nyerjük, hogy

$$u\cdot CD=AS(DR+RC)=AS(DS+v)=AS\cdot DS+AS\cdot v=BQ\cdot CQ+$$
$$+AS\cdot v=BP\cdot v+AP\cdot v=AB\cdot v,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

III. megoldás: Az állítás nyilvánvaló, ha $BC\parallel DA$, ezért feltehetjük, hogy a BC és DA oldalaknak mondjuk a C-n és D-n túli meghosszabbításai metszik egymást egy E pontban. Érintse a trapézba írt kör a párhuzamos oldalakat a P és R pontban, a CDE háromszögbe írt kör pedig a CD oldalt az R' pontban (3. ábra).



3. ábra

A trapézba írt kör a CDE háromszögnek hozzáírt köre, és egyben az ABE háromszögnek beírt köre. Ismeretes, a hozzáírt és beírt körre nézve a

$$CR=DR'$$

összefüggés.

Mivel az ABE és DCE háromszögek hasonlók és R' és P e hasonlóságnál egymásnak megfelelő pontok, így fennáll az

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AP}{DR'}=\frac{AP}{CR}=\frac{u}{v}$$

összefüggés, ami a bizonyítandó állításnak csak átrendezett alakja.

Megjegyzések. Sokan abból kiindulva bizonyították a tételt, hogy a párhuzamos oldalak érintési pontjait összekötő egyenes átmegy az átlók metszéspontján, vagy, hogy érintőnégyszögben az átlók és a szemközti oldalakon levő érintési pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül. Ez az állítás ugyan igaz, de bizonyítása sokkal nehezebb, mint a feladat állításáé. Mások viszont abból a hamis állításból indultak ki, mely szerint két négyszög hasonló volna, ha megfelelő szögeik egyenlők.