A vizsgálandó kifejezés

$$n^2(n^4-1)=(n^2-1)n^2(n^2+1)=(n-1)n(n+1)n(n^2+1).$$

Ha $n$ egész szám, akkor itt az első három tényező három szomszédos egész szám. Ezek közül valamelyik osztható 3-mal.

Ha $n$ páratlan, akkor az első és harmadik tényező, ha páros, akkor a második és negyedik osztható 2-vel, a szorzat tehát osztható 4-gyel.

Az első három tényező közül valamelyik osztható 5-tel is, ha $n$ osztható 5-tel, vagy szomszédos egy 5-tel osztható számmal. Ha viszont $n$ egy 5-tel osztható szám második szomszédja: $n=5k+2$, akkor az utolsó tényező

$$n^2+1=25k^2+20k+4+1=5(5k^2+4k+1)$$

osztható 5-tel.

Az $n^6-n^2$ kifejezés tehát minden egész $n$-re osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel. Ebből következik, hogy 60-nal is osztható,[1] mert minden szám 60-nal osztva

$$60h+m$$

alakban írható, ahol $0\leq m\leq 59$ a maradék. Mivel az első tag osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel, az összeg csak úgy lehet mindhárom számmal osztható, ha $m$ is osztható mind a hárommal.

Csak a 0-ra és 5-re végződő számok oszthatók 5-tel és ezek közül is csak 0-ra végződők lehetnek 4-gyel oszthatók, tehát $m$ lehetséges értéke csak

$$0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50.$$

Ezek közül csak 0 és 30 osztható 3-mal, de az utóbbi nem osztható 4-gyel, tehát $m=0$ és így minden 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztható szám osztható 60-nal is. Ezzel bizonyítottuk a tétel állítását.

*Megjegyzés.* Az, hogy a 3-mal, 4-gyel és 5-tel való oszthatóságtól a szorzatukkal 60-nal való oszthatóságra következtethetünk, azon múlik, hogy e három szám közül semelyik kettőnek nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Nem volna nehéz a kifejezés 4-gyel, 5-tel és 6-tal való oszthatóságát kimutatni, ebből sem következtethetnénk $4\cdot 5\cdot 6=120$-szal való oszthatóságra, amint hogy a kifejezés $n=2$-re 60-at ad és ez mindjárt nem osztható 120-szal. Ebbe a hibába többen beleestek, hogy két számmal való oszthatóságból a szorzatukkal való oszthatóságra következtettek, nem törődve a tényezők közös osztóival.

[1] Hivatkozhatnánk egyszerűen arra a tételre, hogy ha egy egész szám osztható olyan egész számokkal, amelyek páronként relatív prímek egymáshoz, akkor osztható ezek szorzatával is. A következő meggondolás azonban azt mutatja, hogy ezt konkrétan adott számok esetén könnyű közvetlenül igazolni.