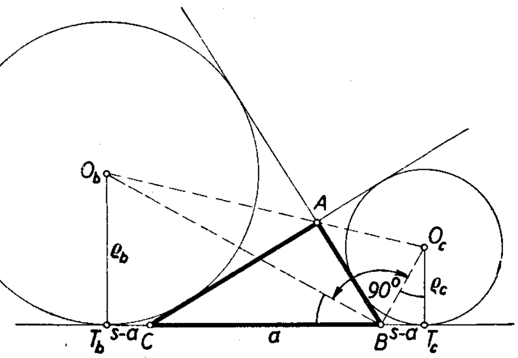
I. megoldás: A feladatot megoldhatjuk számítás segítségével. Jelöljük az érintőkörök középpontját O_b és O_c-vel, érintési pontjukat a BC egyenesen T_b és T_c-vel (5. ábra).



5. ábra

Ismeretes, hogy $BT_b = CT_c = s$, ahol s a háromszög kerületének felét jelenti. B-t összekötve a körközéppontokkal tudjuk, hogy BO_b és BO_c a háromszög B-nél levő belső és külső szögfelezői, és így egymásra merőlegesek.
Ebből következik, hogy

$$BO_cT_c\sphericalangle = O_bBT_b\sphericalangle,$$

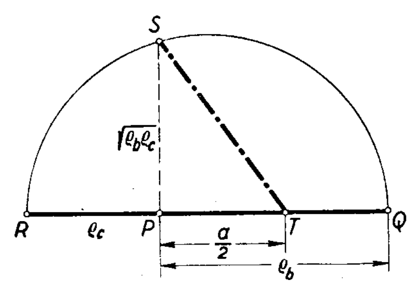
mint merőlegesszárú szögek egyenlők, következőleg BO_cT_c és O_bBT_b háromszögek hasonlók. A befogók arányát felírva

$$\frac{O_cT_c}{T_cB} = \frac{BT_b}{T_bO}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\varrho_c}{s-a} = \frac{s}{\varrho_b}, \qquad s^2 - as - \varrho_b\varrho_c = 0.$$

Innen s-et kiszámítva (a pozitív gyököt véve)

$$s = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \varrho_b\varrho_c}.$$

Ez a távolság megszerkeszthető; a második tag pl. a következő módon: mérjük fel egy egyenesre közös P pontból ellenkező irányban a $PQ = \varrho_b$, $PR = \varrho_c$ távolságot (6. ábra).



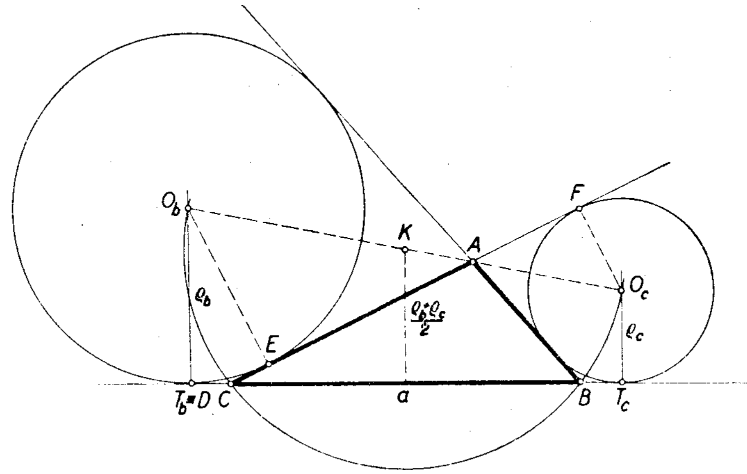
6. ábra

Az egyenesre P-ben emelt merőleges messe a QR, mint átmérő fölé emelt félkört S-ben akkor – mint ismeretes – $PS = \sqrt{\varrho_b\varrho_c}$. P-ből felmérve a QR egyenesre (bármelyik irányban) a $PT = \dfrac{a}{2}$ távolságot

$$ST = \sqrt{PT^2 + PS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \varrho_b\varrho_c}$$

$s = BT_b = CT_c$, alapján a BC egyenesen megszerkeszthetjük a T_b és T_c, pontokat. A többi már triviális.

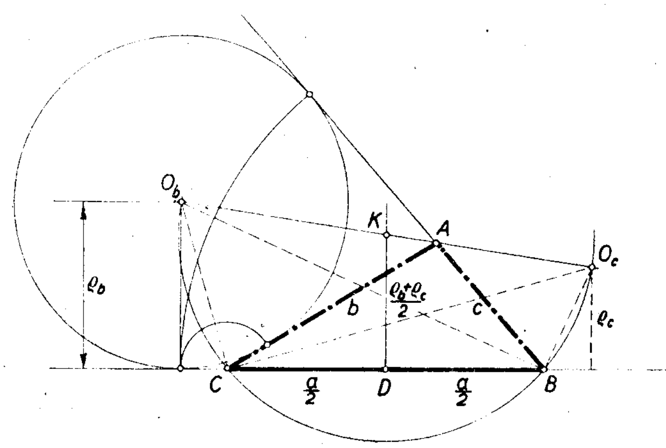
II. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használva, ott azt láttuk be, hogy az O_bO_c szakasz a B pontból – és természetesen ugyanúgy a C pontból is – derékszögben látszik. Ezt az előbbinél sokkal egyszerűbben is felhasználhatjuk a háromszög megszerkesztésére. A nyert összefüggés szerint az O_bO_c, mint átmérő fölé emelt félkör átmegy B-n és C-n (7. ábra).



7. ábra

A kör K középpontjából a BC egyenesre bocsátott merőleges egyrészt felezi a BC szakaszt, mint a kör húrját, másrészt hossza, mint az $O_bT_bT_cO_c$ trapéz középvonala $\dfrac{\varrho_b+\varrho_c}{2}$ hosszúságú.

Ennek alapján a szerkesztés a következőképpen történhetik: Egy a hosszúságú BC szakasz D felezőpontjában $DK=\dfrac{\varrho_b+\varrho_c}{2}$ hosszúságú merőlegest emelünk (8. ábra).



8. ábra

Megrajzoljuk a K középpontú B-n és C-n átmenő kört és ennek a KD egyenestől a C pont felé eső félkörét elmetsszük a BC egyenestől ϱ_b távolságban. Az O_b pont körüli, BC egyenest érintő kör B-ből és C-ből húzott érintője lesz a háromszög másik két oldala.

Be kell látnunk, hogy a háromszög megfelel a feltételeknek, tehát hogy c oldalához hozzáírt kör ϱ_c, sugarú. Azt mutatjuk meg, hogy e hozzáírt kör középpontja a K középponttal rajzolt kör O_b pontjával átelenes O_c, pont és ez a BC egyenestől ϱ_c távolságra van. Az előbbi következik abból, hogy O_c, a háromszög C pontban levő belső szögének és a B csúcsú külszögnek a szögfelezőin van. Ennek igazolására tekintsük az O_b középpontú ϱ_b sugarú kört. Ez szerkesztés szerint hozzáírt köre a háromszögnek, tehát O_bC felezi a C csúcsnál levő külső szöget, O_bB pedig a B-nél levő belső szöget. Így a CO_c és BO_c egyenesek, amelyek az előbbiekre merőlegesek, valóban felezik a C-nél levő belső szöget, ill. a B-nél levő külső szöget. Másrészt O_b-ből és O_c-ből merőlegest bocsátva a BC egyenesre trapézt kapunk, amelynek O_b-ből induló párhuzamos oldala ϱ_b hosszúságú, K-ból induló középvonala pedig $\dfrac{\varrho_b+\varrho_c}{2}$ hosszúságú. Így az O_c-ből induló oldal hossza valóban ϱ_c.

III. megoldás: Készítsünk vázlatot (7. ábra). A CA oldalhoz hozzáírt ϱ_b sugarú kör érintse a BC egyenest D-ben, CA-t E-ben, az AB oldalhoz hozzáírt ϱ_c sugarú kör CA-n levő érintési pontja legyen F; a háromszög kerületének felét jelöljük s-sel.

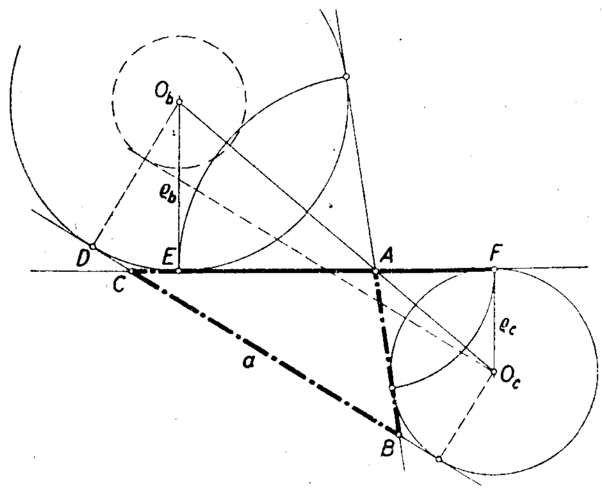
Ekkor

$$BD=CF=s, \qquad CD=CE=s-a,$$

tehát

$$EF=CF=CE=s-(s-a)=a.$$

Ennek alapján a következő szerkesztés nyerhető: $EF=a$ hosszúságú szakaszhoz rajzoljunk ellenkező oldalról E-ben érintő ϱ_b sugarú és F-ben érintő ϱ_c sugarú kört (9. ábra).



9. ábra

Szerkesszük meg a második belső közös érintőt és egy külső közös érintőt. Az érintők zárják közre a kívánt háromszöget. Jelöléseket az ábra szerint választva azt kell igazolnunk, hogy $BC = a$, ez pedig a fenti számoláshoz hasonlóan következik:

$$a = EF = CF - CE = s - CE = DB - DC = CB.$$

Megjegyzés: A helyes megoldók többsége csak bonyolult számításokkal oldotta meg a feladatot.