I. megoldás: Figyeijük meg, hogy páros számot 6-tal szorozva az utolsó számjegy változatlan marad, két egész szám szorzatának utolsó jegyét pedig a tényezők utolsó számjegyei szorzatának az utolsó jegye adja. Így mivel 2^4 utolsó jegye 6, tehát 2^5,2^9, általában tetszés szerinti pozitív egész k-ra 2^{4k+1} ugyanarra a jegyre végződik mint az első hatvány, vagyis 2-re, hasonlóan 2^{4p+2} utolsó jegye 4, 2^{4k+3}-é 8, végül 2^{4k}-é 6.

Így 2^n+1 akkor és csakis akkor végződik 5-re, ha az n kitevő $4k+2$ alakú, 2^n-1 akkor és csakis akkor, ha $4k$ alakú a kitevő $2n$ aszerint $4k+2$ alakú, vagy $4k$ alakú, amint n páratlan, vagy páros. Így $2^{2n}+1$ az első esetben 5-re, a másodikban 7-re végződik. Azt kaptuk tehát, hogy ha a természetes szám, akkor a

$$2^n-1, \quad 2^n+1, \quad \text{és} \quad 2^{2n}+1$$

számok közül az egyik és csakis az egyik osztható mindig 5-tel.

II. megoldás. 2^n-1 és 2^n+1 szomszédos páratlan számok, tehát utolsó jegyeik 1 és 3 vagy 3 és 5, vagy 5 és 7, vagy 7 és 9 vagy 9 és 1 lehet. A második és harmadik esetben a feladat állításának helyessége nyilvánvaló. Az ötödik nem fordulhat elő, mert ekkor

$$(2^n-1)+(2^n+1)=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$

10-zel, tehát 5-tel is osztható volna, ami lehetetlen. A fennmaradó első és negyedik esetben az utolsó jegyek szorzata egyformán 3-ra végződik, tehát $(2^n-1)(2^n+1)=2^{2n}-1$ utolsó jegye 3, s így $(2^{2n}+1)$-é 5, tehát ez osztható 5-tel.

III. megoldás: Elég megmutatni, hogy a feladatban szereplő három szám szorzata osztható 5-tel, mert 5 prímszám, és prímszámoknak megvan az a tulajdonságuk, hagy egész számok egy szorzatának csak úgy lehetnek az osztói, ha osztói valamelyik tényezönek.[2]

A négy szám szorzata:

$$(2^n-1)(2^n+1)(2^{2n}+1)=(2^{2n}-1)(2^{2n}+1)=2^{4n}-1=(2^4)^n-1$$

mindig osztható $2^4-1=15$-tel, tehát 5-tel is.

Az eredmény mutatja, hogy a három szám valamelyike mindig osztható 3-mal is.

Jegyzet. Ez a megoldás világosan mutatja a feladat kapcsolatát az I. forduló 3. feladatával kapcsolatban említett Fermat-féle tétellel.

IV. megoldás: Mivel

$$2^{2n}+1=2^{2n}-4+5=(2^n-2)(2^n+2)+5,$$

így ez a szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha jobboldalon szereplő szorzat osztható 5-tel.
De

$$2^n-2,\ 2^n-1,\ 2^n,\ 2^n+1,\ 2^n+2$$

öt egymástitáni egész szám. Tehát közülük egy és csakis egy osztható 5-tel. A középső szám nem osztható 5-tel, tehát a másik négy közt kell 5-tel oszthatónak lennie. Ebből már következik a feladat állításának helyessége.

[2] A primszáwoknak ez a nevezetes tulajdonsága semmiképpen sem tekinthető magától értetődőnek. Bizonyításira lásd pl. az előző lábjegyzetben idézett műben a 22. old.