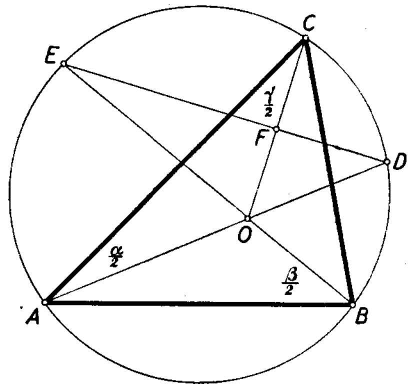
I. megoldás. Legyen a C-ből induló szögfelező és DE metszéspontja F, a szögfelezők metszéspontja O. (2. ábra. – Felhasználjuk tehát azt a tételt, amely szerint a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást.)



2. ábra

Ekkor, mint az $AOC_\triangle$ külső szöge

$$COD\sphericalangle \equiv FOD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

A kerületi szögek tétele szerint

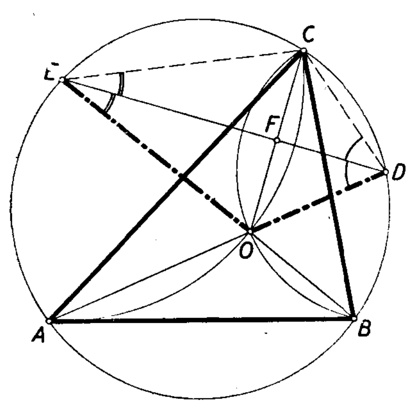
$$ADE\sphericalangle \equiv ODF\sphericalangle = \frac{\beta}{2}.$$

Így a DFO háromszögből

$$DFO\sphericalangle = 180^\circ - (ODF\sphericalangle + FOD\sphericalangle) = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^\circ.$$

DE tehát merőleges a C-ből induló szögfelezőre.

II. megoldás: A D ill. E pont felezi a körülírt körnek a BC, ill. AC oldalak fölötti ívét. Így az egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek egyenlő volta miatt a $CDOE$ négyszögben a DE átló felezi a végpontjainál levő szögeket (3. ábra), tehát szimmetria-tengelye a négyszögnek. (A négyszög deltoid.)



3. ábra

Mivel C és O egymás tükörképei DE-re nézve, azért

$$DE \perp CO,$$

de CO a C-ből induló szögfelező, mert O-n kell átmennie a harmadik szögfelezőnek is.

III. megoldás: A $CDOE$ négyszög deltoid voltát a következőképpen is bizonyíthatjuk:

Ha a B és C pontokat rögzítjük és A végigfut a $\widehat{BEC}$ íven, akkor O annak a körnek BC ívén fut végig, amelynek középpontja D (3. ábra – lásd a tavaly A. D. verseny I. forduló 1. feladatát a K. M. L. 1954 októberi számában). Hasonlóképpen A és C rögzítése és a B pont mozgása esetén O mértani helye az E középpontú AC körív. Tehát

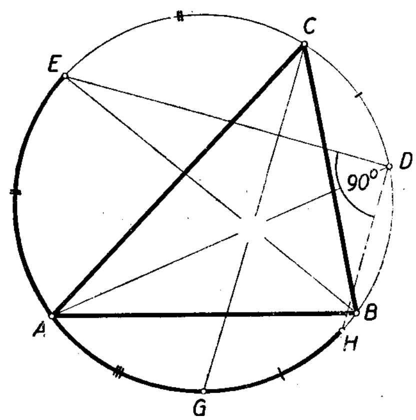
$$DC = DO \qquad \text{és} \qquad EC = EO,$$

ami bizonyítandó volt.

*

A további megoldások nem használják fel a szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tételt.

IV. megoldás. Jelölje G a C-ből húzott szögfelező metszéspontját a körrel (4. ábra).



4. ábra

D, E és G felezik a háromszög oldalai feletti köríveket. Húzzunk D-ből párhuzamost CG-vel. Legyen ennek második metszéspontja a körrel H. Ekkor

$$\overset{\frown}{CH} = \overset{\frown}{CD},$$

így az $\overset{\frown}{EAGH}$ körív a három oldal fölötti körívnek felerészeiből tevődik össze, vagyis félkör.

Ebből következik, hogy

$$EDH\sphericalangle = 90°,$$

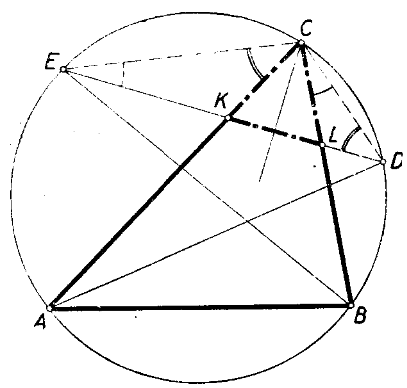
és így a $DH||CG$ összefüggés folytán

$$DE \perp CG.$$

Megjegyzés: Tulajdonképpen azt az általános tételt bizonyítottuk az itt szereplő speciális esetre, hogy két húr szöge akkora, mint a szög és csúcsszögével szemközti ívek összege fölötti kerület szögek a körben. Az itt használt bizonyítás tetszés szerinti húrokra átvihető.

A feladat néhány további megoldása lényegében e tétel más segédvonalak alapján történő bizonyításaiban állt. (Ezeket itt nem közöljük.)

V. megoldás: Messe a DE egyenes az AC és BC oldalt K-ban és L-ben. Több versenyző azt mutatta ki, hogy a CKL háromszög egyenlő szárú. Ebből következik, hogy DE merőleges a C-ből induló szögfelezőre, mert egyenlőszárú háromszögben az alap és a csúcsnál levő szög szögfelezője merőlegesek egymásra.



5. ábra

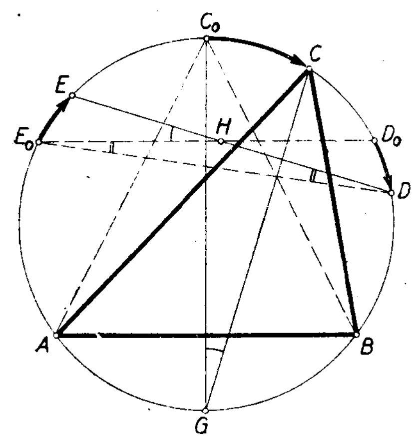
Az egyenlőszárúság például így látható be egyszerűen: Mivel E felezi az AC körívet, D a BC körívet (5. ábra), azért

$$CED\sphericalangle = BCD\sphericalangle \quad \text{és} \quad ACE\sphericalangle = CDE\sphericalangle,$$

mint egyenlő köríveken nyugvó kerületi szögek. Ebből következik, hogy a $CKE_\triangle$ és $DLC_\triangle$ harmadik szögei is egyenlők, amelyek egyben a $CKL_\triangle$ háromszög K-nál és L-nél levő külső szögei.

Így a CKL háromszög egyenlő szárú.

VI. megoldás: Legyen C_0 az AB fölötti C-t tartalmazó körív felezőpontja. Az ABC_0 egyenlőszárú háromszög C_0-ból induló szögfelezője az ábrának szimmetriatengelye s így az ABC_0 másik két szögfelezőjének, D_0 és E_0 metszéspontjait összekötő egyenes merőleges rá (6. ábra).



6. ábra

Ha most C_0 elmozdul a kör mentén C-be, akkor D_0 és E_0 ugyanolyan irányban feleakkora körívvel mozdulnak el. Legyen D_0 E_0 és DE metszéspontja H. A mondottak szerint

$$D_0E_0D\sphericalangle = EDE_0\sphericalangle = \frac{1}{2}C_0GC\sphericalangle.$$

Ennek folytán, mint az E_0DH háromszög külső szöge

$$E_0HE\sphericalangle = HE_0D\sphericalangle + HDE_0\sphericalangle = C_0GC\sphericalangle,$$

vagyis a DE egyenes ugyanakkora szöggel fordult el, mint a C csúcsból induló szögfelező, merőlegességük tehát megmaradt.