I. megoldás: Öttel való oszthatóság eldöntésére elegendő egy szám utolsó jegyét nézni. Hatvány utolsó jegye viszont csak az alap utolsó jegyétől függ, így egyszerű számítással adódik, hogy a negyedik hatvány utolsó jegye, ha az alap utolsó jegye

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

sorra

$$0,\ 1,\ 6,\ 1,\ 6,\ 5,\ 6,\ 1,\ 6,\ 1$$

lesz. Két negyedik hatvány különbsége tehát 0-ra vagy 5-re végződik, s így osztható 5-tel, kivéve azt az esetet, ha az egyik hatványozott szám osztható öttel, a másik pedig nem.

II. megoldás. Annak eldöntésére, hogy egy különbség osztható-e 5-tel, elég ezt a maradékot nézni, amely adódik, ha a kisebbítendőt, ill. kivonandót 5-tel osztjuk.

Szükségünk lesz ennek megvizsgálásához arra az észrevételre, hogy egy szám négyzete 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint az 5-tel való osztásból származó maradékának a négyzete. Valóban, ha

$$a = 5k + r,$$

akkor

$$a^2 = 25k^2 + 10kr + r^2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2,$$

s így a^2-nek 5-tel osztva ugyanannyi a maradéka, mint r^2-nek.

Legyen most már a és b két egész szám.

Ekkor

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Ha a két szám ugyanannyi maradékot ad 5-tel osztva, akkor az első tényező osztható 5-tel. (Beleértjük azt az esétet is, ha mind a két szám osztható 5-tel, azaz ha mindkét maradék 0.) Ha a két szám maradéka 1 és 4, vagy 2 és 3, akkora második tényező osztható 5-tel.

Maradnak még azok az esetek, amelyekben a két szám maradéka 1 és 2, 1 és 3, 4 és 2, 4 és 3, mert ha az egyik szám 0 maradékot ad, a másik pedig 0-tól különböző maradékot 5-tel osztva, akkor a negyedik hatványok különbsége nyitván nem osztható 5-tel. Az 1 és 4 maradékot adó számok négyzete 1-et, a 2 és 3 maradékot adó számok négyzete pedig, 5-tel osztva, 4-et, ad maradékul, s így a hátralevő négy esetben a fenti szorzat harmadik tényezője osztható 5-tel.

Azt nyertük tehát, hogy két szám negyedik hatványának különbsége csak akkor nem osztható 5-tel, ha az egyik szám osztható 5-tel a másik nem,

Jegyzet: Válasszuk b-t 1-nek, ekkor eredményünk azt adja, hogy

$$a^4 - 1$$

mindig osztható 5-tel, ha a nem osztható 5-tel. Ez speciális esete Fermat következő nevezetes tételének:*[1]

Ha p *prímszám,* a *pedig bármilyen* p*-vel nem osztható szám, akkor*

$$a^{p-1} - 1$$

osztható p*-vel.*

[1] Lásd pl. Faragú László: ≫ A számelmélet elemei≪ c. szakköri füzet 75. old.