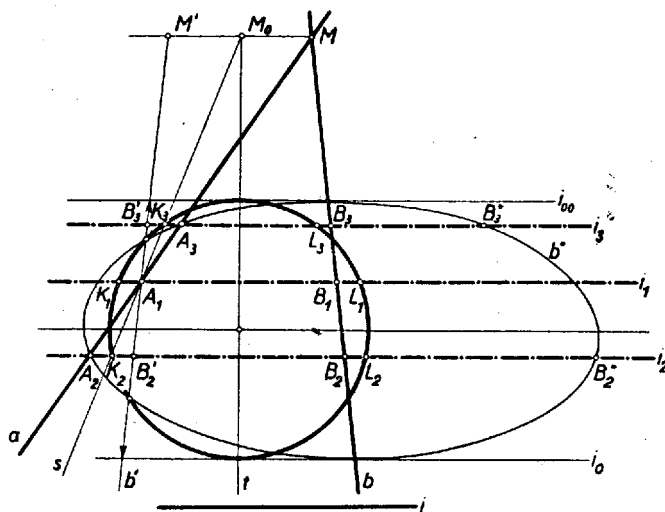


A kör minden pontjából húzzunk az i egyenessel párhuzamos egyenest, messe ez b -t a B pontban, a kört pedig másodszer az L pontban. L -ből mérjük rá a KL egyenesre mindkét irányban a KB távolságot. A keletkező mértani helynek az a egyenessel való metszéspontjaiban i -vel párhuzamosan húzott egyenesek adják a feladat megoldásait.



3. ábra

Jelöljük az i -vel párhuzamos körérintőket i_0 - és i_{00} -val, a b -nek a i irányra merőleges t körátmérőre vonatkozó tükörképét b' -vel.

Ha KB -vel *ellentétes* irányú LB' távolságokat mérünk fel (lásd az ábrán az i_2 és i_3 egyeneseken a B'_2 ill. B'_3 pontokat), akkor, ha a K végigfut a körön a B' pontok kétszer futják be a b' -n ennek i_0 és i_{00} közti szakaszát. (Az ábrán a két végpontot nyílal jelöltük.) Ennek a szakasznak az a egyenessel való A_1 metszéspontján át – ha van ilyen – az i -vel párhuzamosan húzott i_1 egyenes szolgáltatja a feladat egyik megoldását. (Nevezhetjük »tükrös megoldás«-nak, mert $K_1A_1 = L_1B$ egymásnak tükörképei t -re nézve.)

A mértani hely másik részét megkapjuk, ha az i -vel párhuzamos egyenesekre a KB szakaszokkal *egyirányú* LB^* távolságokat mérünk. Ha K befutja a teljes kört (tehát a K és L pontok felcserélődnek) a B^* pontok zárt görbét futnak be, mely görbéből minden i_0 és i_{00} közti párhuzamoson 2–2 pont fekszik. Ennek a görbének az a egyenessel lehetséges metszéspontjait (A_2 A_3) kellene megszerkeszteni. Erre azonban a talált mértani hely már nem alkalmas. Hasznát vehetjük azonban itt is a b' egyenesnek.

Tegyük fel, hogy az A_2 -n átmenő i_2 megoldás már meg van szerkesztve; ennek metszéspontja a körrel K_2 és L_2 , a b és b' egyenesekkel és B_2 és B'_2 , végül $K_2A_2 = L_2B_2$ és e távolságok egyirányúak. Mivel b' szerkesztése szerint $L_2B_2 = K_2B'_2$, azért $K_2A_2 = K_2B'_2$ és e távolságok már *ellentétes* irányúak, azaz K_2 az $A_2B'_2$ szakasz felezőpontja. Így a K_2 és hasonlóképpen a K_3 is, rajta van azon a vonalon, melyet az i_0 és i_{00} közti i -vel párhuzamos egyenesek a és b' közé eső szakaszainak felezőpontjai alkotnak. Tudjuk azonban, hogy ilyen szakaszt bárhol megrajzolva, a keletkező háromszögnek s súlyvonalán vannak az összes felezőpontok, tehát a súlyvonalnak az i_0 és i_{00} közé eső szakaszán lesz az újabb mértani hely, melynek közös pontjai a körrel adják a K_2 -t és K_3 -at. (Ha a és b metszéspontja M a rajz keretén belül van, akkor az MM' szakasz felezőpontja M_0 nyilván a t tengelyen van és az A_1M_0 egyenes az $A_1MM'\Delta$ keresett s súlyvonala.) A K_2 és K_3 pontokon át i -vel húzott párhuzamosok i_2 és i_3 megoldások, amelyeken $K_2A_2 = L_2B_2$ ill. $K_3A_3 = L_3B_3$ egyirányúak. Ilyen fajta (nem tükrös) megoldások száma 2, 1 (2 egybeeső), ill. 0 aszerint, amint s két különböző pontban metszi a kört, érinti a kört, vagy nem metszi a kört.

Az összes megoldások száma tehát 3, 2, 1 vagy 0.

Megjegyzés: A b^* görbe úgy keletkezett az adott körből, hogy azt a b' egyenestől mindkét oldalon egy adott i irányban kétszeresre nyújtottuk. Ha speciálisan az egyenes átmérő és az irány erre merőleges (a nyújtás vagy zsugorítás pedig tetszés szerinti arányú), akkor a III. osztály tananyagában szerepel annak bizonyítása, hogy a körből így keletkező görbe ellipszis. A IV. reálosztályosok az ábrázoló-geometriai órákról azt is tudják, hogy tetszőleges egyenes, tetszőleges irányú és tetszőleges arányú nyújtás (vagy zsugorítás) esetén is , a kör ellipszisbe megy át, és a kör- és ellipszis-rendszer közötti geometriai rokonságot »affinitás«-nak hívjuk. A IV. reálosztályosok még azt is tudják, hogy pl. a tengelyeivel megadott ellipszisnek egy egyenessel való metszéspontjait úgy szerkeszthetjük meg, hogy az ellipszist affin vonatkozásba hozzuk egy körrel, az ellipszis-rendszerben megadott egyenesnek megszerkesztjük az affin megfelelőjét a körrendszerben, ez utóbbinak a körrel való metszéspontjait visszavisszük az ellipszis-rendszerbe. Jelen esetben tulajdonképpen az ellipszis-rendszerben megadott $a \equiv s^*$ egyenesnek megszerkesztettük a körrendszerbe a megfelelőjét s -et, 1 : 2 arányú zsugorítással.

Figyeljük végül meg, hogy az i_1 megoldáson egyszerre fennáll $K_1A_1 = L_1B_1$ és $K_1B_1 = L_1A_1$. Ez is és az a tény is, hogy míg K befutja a kört, B' kétszer halad végig a b' szöbajóvő szakaszán (a mértani helynek ez a része egyenes szakasszá fajuló ellipszisnek tekinthető), vagyis az A_1 pont, mint e mértani helynek és az a egyenesnek metszéspontja, kétszeresen számít, azt mutatja, hogy tulajdonképpen az i_1 megoldás is kétszeresen számít.