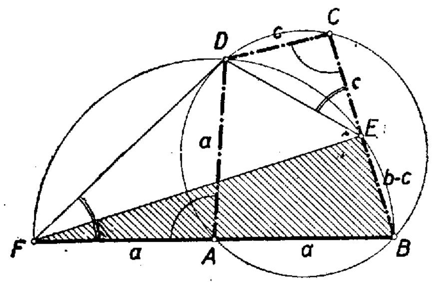
I. megoldás: Adva van az $ABCD$ húrnégyszögnek $AB = AD = a$, $BC = b$ és $CD = c$ oldala. Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra).

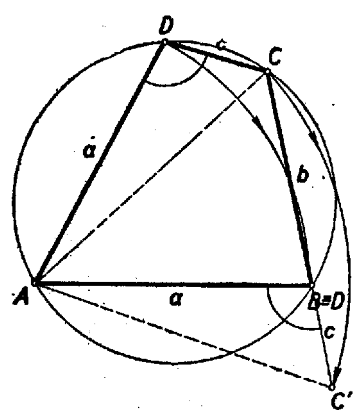


1. ábra

Az A körül $AB = AD = a$ sugárral rajzolt kör kimetszi a BC oldalból, vagy annak meghosszabbításából az E pontot, az AB oldal meghosszabbításából az F pontot. Ismeretes, hogy a húrnégyszögnek bármely szöge egyenlő a szemközti szög mellékszögével. Eszerint tehát a C-nél fekvő egy íves szög egyenlő az A-nál fekvő egy íves szöggel és az $FBED$ húrnégyszögben az F-nél fekvő két íves szög egyenlő a E-nél fekvő két íves szöggel. Ebből következik, hogy a DAF és DCE háromszögek 2–2 szöge egyenlő, vagyis e két háromszög hasonló. De $AD = AF = a$, és így $CD = CE = c$, vagyis $BE = b - c$. Thales tétele értelmében $BEF\sphericalangle = 90°$.

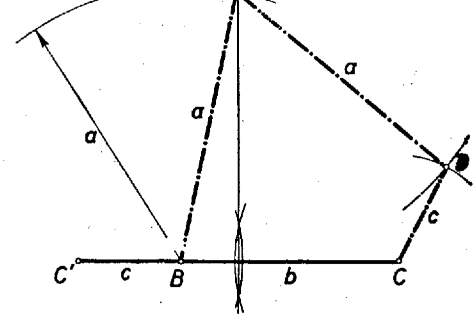
Az $FB = 2a$ átfogóból és $BE = b - c$ befogóból a BEF derékszögű háromszög (az 1. ábrán srafozva) egyszerűen megszerkeszthető, feltéve, hogy $2a > b - c$. A BEF derékszögű háromszög birtokában az A, C és D pontok megszerkesztése már nem okoz nehézséget.

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A jelöléseket megtartva, forgassuk az $ADC\triangle$-et A pont körül úgy, hogy a D pont D' elforgatása B-be kerüljön (2. ábra).



2. ábra

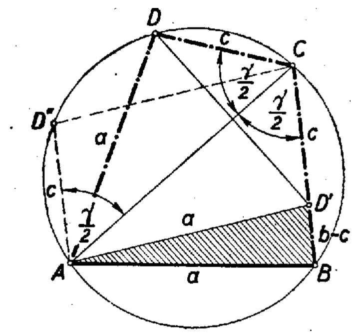
Mivel húrnégyszögünk egy íves $D\sphericalangle$-e egyenlő a szemközti $B\sphericalangle$ egy ívvel jelzett mellékszögével, azért a C pont elforgatása, C' a CB oldal meghosszabbítására kerül. Mivel $AC = AC'$, azért az A pont egyrészt rajta van a CC' távolságot merőlegesen felező egyenesen, másrészt pedig a B középpontú a sugarú körön. A szerkesztést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Megoldás van, ha $a > \dfrac{b-c}{2}$, vagyis $2a > b-c$.

III. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldva és használjuk az eddigi jelöléseket. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $b > c$ (4. ábra).



4. ábra

$AB = AD$, tehát a fölöttük levő C-t nem tartalmazó körívek is egyenlők. Így a kerületi szögek tétele alapján a CA átló felezi a C-nél fekvő γ szöget, tehát a D pontnak az AC átlóra vonatkozó tükörképe D' ráesik a b oldalra és $BD' = b - c$. (D' tehát azonos az I. megoldásban szerepelt E ponttal). Az ABD' egyenlőszárú háromszög (a 4. ábrán srafozva) az a és $b-c$ szakaszokból könnyen megszerkeszthető. (E háromszögnek a keresett húrnégyszöggé való kiegészítése már triviális.)

Lényegében ugyanennek a háromszögnek megszerkesztésére vezet, ha D-nek megszerkesztjük az AC átlót merőlegesen felező egyenesre vonatkozó D'' tükörképét (4. ábra). Mivel a $CAD''\sphericalangle$ a tükrözés folytán $\dfrac{\gamma}{2}$, azért a váltószögek törvénye alapján $AD'' \parallel BC$, vagyis $BCD''A$ egyenlőszárú trapéz, amely az adatokból (a szár, $b \parallel c$) szerkeszthető. A szerkeszthetőség feltétele, hogy $2a > b - c$.