I. megoldás: Jelöljük a keresett kifejezés értékét X-szel. Mivel (2) alapján $A=-(B+C)$, $B=-(A+C)$ és $C=-(A+B)$, azért

$$\begin{aligned} X=aA^2+bB^2+cC^2 &= -\left[aA(B+C)+bB(A+C)+cC(A+B)\right]= \\ &= -aAB-aAC-bBA-bBC-cCA-cCB= \\ &= -AB(a+b)-BC(b+c)-CA(c+a). \end{aligned}$$

De (1)-ből $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$, és így a keresett

$$X=ABc+aBC+AbC=ABC\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right).$$

A zárójelben lévő kifejezés értéke (3) alapján 0, tehát

$$X=0.$$

II. megoldás: Kiindulhatunk az (1)-ből, amely szerint $a=-(b+c)$, $b==-(a+c)$ és $c=-(a+b)$. Tehát

$$\begin{aligned} X=aA^2+bB^2-cC^2 &= -(b+c)A^2-(a+c)B^2-(a+b)C^2= \\ &= -a(B^2+C^2)-b(A^2+C^2)-c(A^2+B^2)= \\ &= -a(B+C)^2-b(A+C)^2-c(A+B)^2+2aBC+2bAC+2cAB. \end{aligned}$$

De (3)-ból ABC-vel szorozva (A, B és C nem lehet 0),

$$aBC+bAC+cAB=0,$$

(2)-ből

$$(B+C)^2=A^2, \quad (A+C)^2=B^2, \quad (A+B)^2=C^2,$$

és így

$$X=-aA^2-bB^2-cC^2=-X,$$

amiből

$$X=0.$$

III. megoldás: $(A+B+C)(aA+bB+cC)=0$, mert az első tényező (2) alapján 0. A baloldalt átalakítva és az (1) alatti egyenletet figyelembe véve

$$\begin{aligned} aA^2+bB^2+cC^2+AB(a+b)+BC(b+c)+CA(c+a)&= \\ =X-ABc-BCa-CAb&=0. \end{aligned}$$

(3) alapján a baloldal utolsó három tagjának összege 0 (lásd II. megoldást) és így

$$X=0.$$