I. megoldás: Nem megy az általánosság rovására, ha egyszer és mindenkorra feltételezzük, hogy $a > b$. Pythagoras tétele szerint

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

feltételünk szerint (mivel a súlyvonal $\frac{c}{2}$)

$$2ab = \frac{c^2}{2} \tag{2}$$

(1) és (2)-t összeadva, ill. kivonva nyerjük

$$(a+b)^2 = \frac{3c^2}{2},$$
$$(a-b)^2 = \frac{c^2}{2},$$

amiből

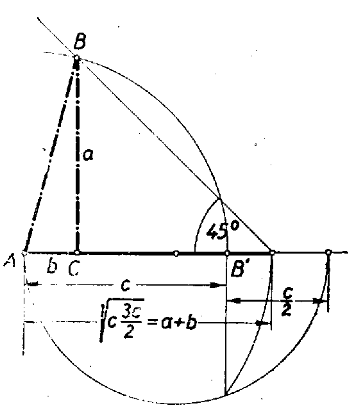
$$a + b = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{6}}{2}, \tag{3}$$

$$a - b = \frac{c\sqrt{2}}{2} \tag{4}$$

A szerkesztés ezek alapján többféleképpen is történhetik.

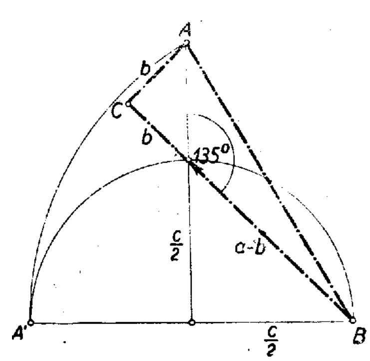
α) (3) és (4) összeadásából nyerjük, hogy $a = \frac{c\sqrt{6} + c\sqrt{2}}{4}$, amely szakasz könnyen szerkeszthető ($c\sqrt{6}$ mértani középarányos $2c$ és $3c$ között, $c\sqrt{2}$ pedig c és $2c$ között). a és c birtokában a keresett háromszög szerkesztése triviális.

β) (3) alapján $a+b$, mint mértani középarányos c és $\frac{3}{2}c$ között megszerkeszthető. Az $a+b$ és c szakaszok birtokában a háromszög szerkesztése a tankönyvből ismeretes (1. ábra).



1. ábra

γ) (4) szerint $a-b$ olyan négyzet átlója, melynek oldala $\frac{c}{2}$. $a-b$ és c birtokában a derékszögű háromszög ismert módon (2. ábra) megszerkeszthető.



2. ábra

Mindhárom esetben könnyen kimutatható, hogy az így megszerkesztett háromszög tényleg eleget tesz követelményünknek. Pl. az utóbbi esetben Pythagoras-tétele alapján

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 2 \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2},$$

amiből

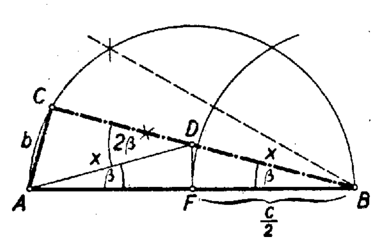
$$2ab = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = c^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2},$$

és így tényleg

$$ab = \frac{c^2}{4}.$$

Oldalak helyett szögeket is kiszámíthatunk, mint azt az alábbi II–V. megoldások mutatják.

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Jelöljük az AB átfogó felező pontját F-fel, tehát $FA = FB = \frac{c}{2}$. Az F-ben az átfogóra emelt merőleges messe a $BC = a$ befogót D-ben. Legyen $AD = DB = x$.

A szögek egyenlősége miatt

$$ABC\triangle \sim DBF\triangle,$$

és így

$$x : \frac{c}{2} = c : a,$$

amiből

$$x = \frac{c^2}{2a}.$$

De a feltétel szerint

$$c^2 = 4ab,$$

és így

$$x = 2b$$

Az ACD derékszögű háromszögben $\sin CDA\sphericalangle = \sin 2\beta = \frac{b}{x} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, amiből

$$2\beta = 30^\circ, \quad \text{vagyis} \quad \beta = 15^\circ,$$

mely szög könnyen szerkeszthető.

III. megoldás: A jelöléseket megtartva

$$a = c\sin\alpha, \qquad b = c\cos\alpha.$$

A feltétel szerint

$$ab = c^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4},$$

vagyis, $\frac{2}{c^2}$-tel szorozva

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2},$$

azaz

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2},$$

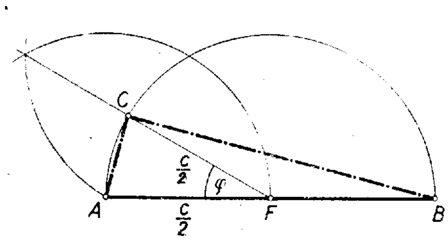
ahonnan $(0 < 2\alpha < 180)$

$$2\alpha = 30^\circ \quad \text{ill.} \quad 150^\circ,$$

$a > b$ miatt

$$\alpha = 75^\circ.$$

IV. megoldás: Az előbbi jelöléseket megtartva jelöljük az $AFC\sphericalangle$-et φ-vel (4. ábra).



4. ábra

Az $AFC\triangle$ területe a fele az $ABC\triangle$ területének. Tehát

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\sin\varphi=\frac{ab}{4},$$

vagyis $c^2\sin\varphi=2ab$, amiből $\sin\varphi=\dfrac{2ab}{c^2}$.

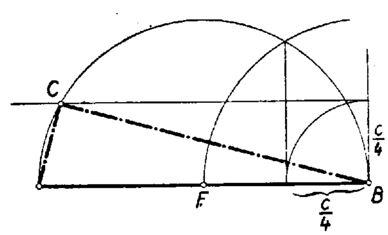
De a feltétel szerint $ab=\dfrac{c^2}{4}$, vagyis $2ab=\dfrac{c^2}{2}$, és így $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$, vagyis $\varphi=30^\circ$. A C pont megszerkesztése a körülírt körön egyszerűbb már nem lehet.

V. megoldás: A legegyszerűbb megoldáshoz (ha nem is a legegyszerűbb szerkesztéshez) jutunk, ha feltételünket »helyesen« olvassuk.

Feltételünk szerint

$$ab=\frac{c^2}{4}=c\cdot\frac{c}{4}.$$

ab a háromszög kétszeres területe, tehát $c\cdot\dfrac{c}{4}$ is az, vagyis $\dfrac{c}{4}$ a háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága. A szerkesztést az 5. ábra mutatja.



5. ábra

Az utóbbi megoldásnál közvetlenül nyilvánvaló, hogy a megszerkesztett háromszög teljesíti a feladatban kirótt feltételt: $ab=c\cdot\dfrac{c}{4}=\dfrac{c^2}{4}$. A II–IV. megoldásnál (ahol tulajdonképpen kiszámítottuk, hogy $\alpha=75^\circ$ és $\beta=15^\circ$) a következőképpen igazolhatjuk szerkesztésünk helyességét:

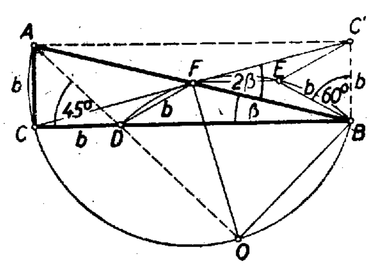
$$a=c\cos 15^\circ,\qquad b=c\sin 15^\circ,$$

és így

$$ab=c^2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=c^2\frac{\sin 30^\circ}{2}=\frac{c^2}{4}.$$

De anélkül, hogy a háromszög oldalait vagy szögeit kiszámítanánk, is megoldhatjuk feladatunkat, amint azt az alábbi VI–VII. megoldások mutatják.

VI. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 6. ábra mutatja.



6. ábra

Szerkesszük meg azt a kört, amely a CF egyenest F-ben érinti és a B csúcsponton is átmegy. Legyen ennek a körnek középpontja O és messe ez a kör a BC befogót másodszor D-ben. Mivel $CF^2 = CB \cdot CD$, vagyis $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a \cdot CD$, azért a feladat szerint $CD = b$. Ha kimutatjuk, hogy O rajta van az AB fölé, mint átmérő fölé rajzolt körön és $BO = \frac{c}{2}$, továbbá, hogy a D pont rajta van az AO egyenesen, akkor lényegében a II. megoldásban nyert szerkesztéshez jutottunk, de más indokolással.

Mivel BFC egyenlőszárú háromszögből

$$FCD'\sphericalangle = FBD\sphericalangle = \beta,$$

másrészt $CFD\sphericalangle = \beta$, mint az $\widehat{FD}$ ív fölötti húr-érintőszög, azért CDF egyenlő szárú háromszög és

$$FD = CD = b.$$

Az $\widehat{FB}$ ívhez tartozó húr-érintő szög, mint a $BFC\triangle$ külső szög 2β, tehát ez az ív kétszerese az $\widehat{FD}$ ívnek. Az E felezőpontját berajzolva, a húrokra $FE = EB = b$ és $FE \parallel DB$.

Az $ABC\triangle$-et téglalappá egészítve ki FE ennek a középvonalán fekszik. Így $C'E = EB = b$, másrészt $BC' = AC = b$, tehát a BEC' szabályos háromszögből $C'BE\sphericalangle = 60^\circ$, s így

$$EBD\sphericalangle = 2\beta = 30^\circ,$$

Ugyanekkorák az $\widehat{FB}$ íven nyugvó kerületi szögek, és így a középponti szög

$$BOF\sphericalangle = 60^\circ \quad \text{és} \quad BO = FO = BF = \frac{c}{2}$$

a kör sugara. A BOD egyenlőszárú háromszög alapján nyugvó szög

$$DBO\sphericalangle = 60^\circ - \beta = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ = BDO\sphericalangle.$$

Ebből következik, hogy ez a háromszög derékszögű, továbbá A, D és O egy egyenesbe esnek és O (a C-vel együtt) az AB fölötti félkörön van.

Eszerint a szerkesztés menete: az $AB = c$ átmérő fölötti félkört a $BO = \frac{c}{2}$ távolsággal elmetszve, majd az AO egyenest az $OD = \frac{c}{2}$ távolsággal elmetszve, a BD egyenes metszi ki az AB fölötti félkörből a keresett háromszög C csúcsát.

A szerkesztés igazolása: Mivel az $ABO\triangle$ szögei 30°, 60° és 90°, azért az O körüli $\frac{c}{2}$ sugarú körnek az AB-vel való F metszéspontjára $FOB\triangle$ szabályos, mert $FBO\sphericalangle = 60^\circ$, tehát F felezőpont, $CF = \frac{c}{2}$, mint a derékszögű háromszög súlyvonala, továbbá $BFO\sphericalangle = 60^\circ$. BOD egyenlőszárú derékszögű háromszög, tehát $ADC\sphericalangle = DAC\sphericalangle = 45^\circ$, $CD = CA = b$; másrészt az AFC egyenlőszárú háromszögben $CAF\sphericalangle = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, s így az $AFC\sphericalangle = 30^\circ$. Ebből következik, hogy

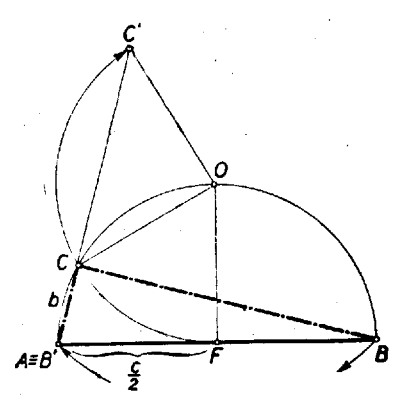
$$CFO\sphericalangle = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

Így CF érinti az O középpontú kört, s így

$$CF^2 = CD \cdot CB = ba,$$

tehát az $ABC\triangle$ megfelel a kívánalmaknak.

VII. megoldás: Az adott $AB = c$ átfogó fölé rajzolt F középpontú Thales-körben az AB átmérőre merőleges sugár végpontját jelöljük O-val (7. ábra).



7. ábra

O körül $OF = \dfrac{c}{2}$ sugárral rajzolt kör metszi ki a Thales-körből a keresett C pontot. (Ez tulajdonképpen az V. megoldásban nyert szerkesztés, ismét más megindokolással.)

Forgassuk el a $BC = a$ befogót O körül $90°$-kal az óra járásával megegyező irányban, akkor a B elforgatása a B' az A pontba kerül, C elforgatása pedig C', és $B'C' \equiv AC' \perp BC$. Mivel AC is merőleges BC-re, azért a C' pont az AC befogó meghosszabbításán fekszik.

A szerkesztés szerint az $AF = \dfrac{c}{2}$ az O körül rajzolt körnek az A pontból húzott érintője, és így

$$AC' \cdot AC = ab = \left(\frac{c}{2}\right)^2 .$$