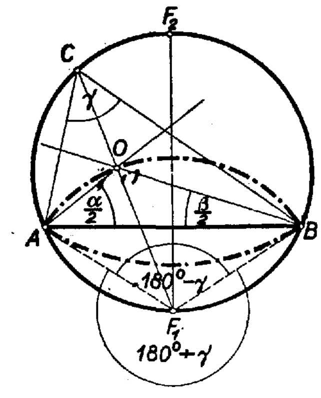
I. megoldás: Legyen A és B a két rögzített pont, F_1 és F_2 az AB húrra merőleges átmérőnek végpontjai és C a harmadik csúcs, mely egyelőre mozogjon az AF_2B köríven (1. ábra).



1. ábra

A kerületi szögek tétele alapján az $ACB\sphericalangle=\gamma$ szög állandó. A beírt kör O középpontja a szögfelezők metszéspontja, így az

$$AOB\triangle-\text{ből az } AOB\sphericalangle=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}=180^\circ-\frac{180^\circ-\gamma}{2}=90^\circ+\frac{\gamma}{2},$$

vagyis az O pontból az AB húr az állandó $90^\circ+\dfrac{\gamma}{2}$ szög alatt látszik. Tehát az O pontok mértani helyének egy része az AB húrhoz tartozó, $90+\dfrac{\gamma}{2}$ szögnek megfelelő látókörív. E látókörív középpontja az AB húrra merőleges F_1F_2 egyenesnek az a pontja, amelyben az ugyanazon íven nyugvó középponti szög $2\left(90+\dfrac{\gamma}{2}\right)=180^\circ+\gamma$, vagyis amelyből az AB húr $360^\circ-(180^\circ+\gamma)=180^\circ-\gamma$ szög alatt látszik; ez a pont pedig az F_1 pont, mert az $ACBF_1$ húrnégyszögben az $AF_1B\sphericalangle=180^\circ-\gamma$, mint a γ szöggel szembenfekvő szög.

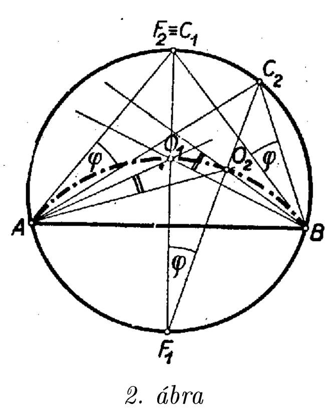
Ugyanúgy kimutatható, hogy ha a C pont a BF_1A íven mozog, akkor az O pont leírja az F_2 középpontú BA ívet. Tehát a feltételeket kielégítő O pontok szükségképpen az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, AB köríveken fekszenek. Meg kell még mutatnunk, hogy – fordítva – e köríveknek minden pontja eleget tesz a követelményeknek. Az $AOB\sphericalangle=90^\circ+\dfrac{\gamma}{2}$ szög AO, ill. BO szárára tükrözzük az AB egyenest (1. ábra). A tükörképek az AB egyenessel, annak az F_2-t tartalmazó oldalán $2\cdot OAB\sphericalangle$ és $2\cdot OBA\sphericalangle$ nagyságú szögeket zárnak be. E két szög összege

$$2(OAB\sphericalangle+OBA\sphericalangle)=2\left[180^\circ-\left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=180^\circ-\gamma$$

tompaszög, tehát ezek az egyenesek metszik egymást az AB határolta, F_2-t tartalmazó félsíkban és γ nagyságú szöget zárnak be. Ezek szerint C metszéspontjuk rajta van az AF_2B köríven és O, mint két szögfelező metszéspontja, az $ABC\triangle$ beírt körének középpontja, tehát megvan a mértani helyet definiáló tulajdonsága.

Most már kimondhatjuk, hogy a keresett mértani hely: az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, $\widehat{AB}$ körívek.

II. megoldás: Ha $C_1\equiv F_2$, akkor az $AC_1B\triangle$-be írt kör középpontja legyen O_1 (2. ábra).



2. ábra

Az AF_2B körív egy tetszőleges C_2 pontjához tartozó $ABC_2\triangle$ beírt körének középpontja, vagyis szögfelezőinek metszéspontja legyen O_2. A változó C csúcspontból kiinduló szögfelező, a kerületi szögek tétele alapján, mindenkor átmegy az F_1 ponton

$$C_1AC_2\sphericalangle=C_1F_1C_2\sphericalangle=C_1BC_2\sphericalangle=\varphi,$$

mint ugyanazon a köríven ($\widehat{C_1C_2}$) nyugvó kerületi szögek.

Ebből következik, hogy ha a háromszög f_c szögfelezője F_1 körül φ szöggel elfordul, akkor

1. az a és b oldal is φ szöggel fordul el és következésképpen

2. a másik két szögfelező $\frac{\varphi}{2}$ szöggel (az ábrán kétszeres ívvel jelölve) fordul el.

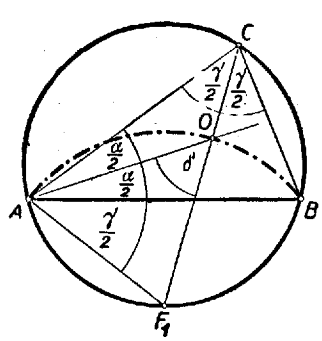
Tehát

$$O_1AO_2\sphericalangle = O_1BO_2\sphericalangle = \frac{\varphi}{2}.$$

Mivel a kerületi szögek tétele megfordítható, ez azt jelenti, hogy az O_1 és O_2 pontok rajta vannak azon az $\widehat{AB}$ köríven, melynek az O_1O_2 ívhez tartozó középponti szöge $2\cdot\frac{\varphi}{2} = \varphi$, és maga a középpont pedig rajta van az AB húrt merőlegesen felező F_1F_2 egyenesen. Mivel – mint láttuk – éppen $O_1F_1O_2\sphericalangle = \varphi$, azért az O pontokat tartalmazó $\widehat{AB}$ körív középpontja F_1. A fenti bizonyítás megfordításával kimutatható, hogy a szóbanforgó körív minden pontja eleget tesz feltételeinknek.

Ugyanígy végezhető a bizonyítás az AF_1B körívre nézve.

III. megoldás: $F_1AB\sphericalangle = F_1CB\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mint kerületi szögek (3. ábra).



3. ábra

Az $AOC\triangle$ O-nál fekvő külső szöge δ egyenlő a két belső szög összegével, vagyis $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, amiből következik, hogy az $AOF_1\triangle$ egyenlő szárú, tehát

$$F_1O = F_1A.$$

Ugyanígy végezhető a szükségesség e bizonyítása az $\widehat{AF_1B}$ köríven fekvő C pontokhoz tartozó O pontokra nézve is. E bizonyítások megfordításból következik, hogy a szükséges feltétel elégséges is, és ezzel bebizonyítottuk, hogy az O pontok mértani helye az F_1, és F_2 középpontú, A (és B) ponton átmenő köröknek, az adott kör belsejébe eső ívei.