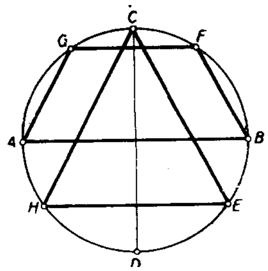
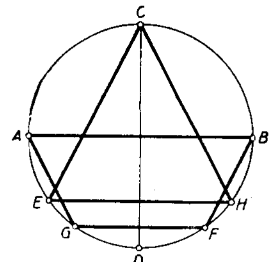
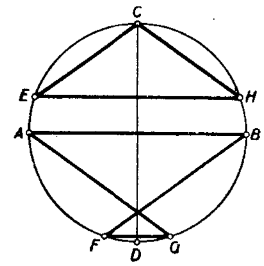
A leírás különböző ábrákhoz vezethet (1., 2. és 3. ábra), aszerint, hogy hol vesszük fel az E pontot. Az 1. ábrán a BD a 2.-on DA negyedkörön vettük az E pontot. A két ábrán, csak a trapéz helyzete tükrös egymáshoz képest az AB átmérőre vonatkozóan. Ez a területekre nincs befolyással. Ha ellenben E átjut az AC ívre (3. ábra), akkor az $ABFG$ négyszög hurkolt négyszög két párhuzamos oldallal: »hurkolt trapéz«.



1. ábra



2. ábra

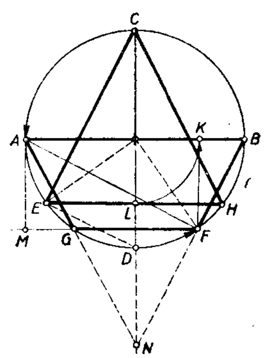


3. ábra

Az állítás erre az esetre is igaz, ha a hurkolt trapéz területét megfelelően értelmezzük, de hogy egyáltalán mit értsünk egy önmagát metsző négyszög területén, az eleve nem világos és ezért hibáztatható is a feladat megfogalmazása.

Az $ABGF$ trapéz területét venni, vagy akár a két háromszög területének összegét, ez a feladat szempontjából nem megfelelő, hiszen a keletkezett kettős háromszögből az AB oldalhoz csatlakozó hasonló a CEH háromszöghöz, de már egymagában is nagyobb nála, mert $AB > EH$. Hogy a terület milyen értelmezése mellett érvényes az állítás ebben az esetben is, az bizonyítás közben fog adódni. Ha E a CB ívre kerül, akkor lényegesen új esetet nem kapunk, csak a »hurkolt trapéz« kerül ismét az AB átmérő másik partjára. Térjünk ezután a feladat megoldására.

I. megoldás: Alakítsuk először a trapézt téglalappá úgy, hogy az F-ből AB-re bocsátott FK merőlegessel elvágott BFK háromszöget a GA oldalhoz illesztjük (4. ábra).



4. ábra

Az így keletkezett $AMFK$ téglalapot az AF átlóval két egyenlő részre osztjuk, és megmutatjuk, hogy a keletkezett $AFK\triangle$ egybevágó a CEH háromszög felét kitevő CEL háromszöggel, ahol L az EH húr középpontja (mely nyilván CD-re esik). Valóban forgassuk el utóbbit a kör középpontja körül az óra járásával ellenkező irányban 90°-kal. Ekkor C átmegy A-ba és mivel D az elforgatás után B-be kerül, így L az AB átmérőre fog kerülni. Azt kell csak belátnunk, hogy az E pont F-be megy át, ez pedig teljesül, mert a BC és EF ívet párhuzamos húrok metszik ki a körből, tehát az EF ív is negyedkör.

A bizonyítás lényegtelen változtatással alkalmazható arra az esetre is, ha E a BD negyedkörön van (a következő megoldásból látható lesz, hogy hogyan), nem világos azonban, hogy hogyan vihető át a hurkolt esetre. Ez sokkal könnyebben lesz látható a következő megoldásból, amely szoros rokonságban van az elsővel.

II. megoldás: Az előbbi jelöléseket használva (4. ábra) nyilvánvaló, hogy AK a trapéz középvonalával egyenlő, tehát a trapéz ill. háromszög t_1 ill. t_2 területe

$$t_1 = AK \cdot FK, \quad t_2 = \frac{CL \cdot EH}{2} = CL \cdot EL.$$

Megmutatjuk, hogy

$$FK = EL \quad \text{és} \quad AK = CL,$$

ill. utóbbi helyett, hogy $BK = DL$. Mindkét egyenlőség következik abból, hogy

$$BFK\triangle \cong DEL\triangle.$$

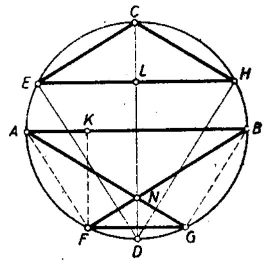
Forgassuk el az utóbbi háromszöget 90°-kal az óra járásával ellenkező irányban a kör középpontja körül. Ekkor D átmegy B-be, EL pedig a B-hez húzott sugárra merőleges helyzetbe kerül, E pedig átmegy F-be, amint azt az I. megoldásban láttuk. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés: A bizonyítás »hurkolt trapéz« (5. ábra) esetén is azt adja, hogy

$$EL = FK, \quad DL = BK, \quad \text{amiből} \quad CL = AK,$$

tehát

$$EL \cdot CL = FK \cdot AK = FK. \quad \frac{AB - FG}{2} = \frac{FK \cdot AB}{2} - \frac{FK \cdot FG}{2}.$$



5. ábra

Baloldalt ismét a $CEH\triangle$ területe áll, a jobboldal viszont felfogható az AFB és AFG háromszögek területei különbségének. Ebből a különbségből kiesik a két háromszög közös részének a területe és marad a »hurkolt trapéz« nagyobb és kisebb háromszöge területének *különbsége.* A hurkolt esetben tehát e területkülönbség egyezik meg a CEH háromszög területével.

Számítás nélkül is bebizonyíthatjuk ezt az eredményt. Ugyanis a közönséges trapézra fentebb már bebizonyított tétel alapján az 5. ábrában a $DEH\triangle$ területe egyenlő az $ABGF$ *közönséges* trapéz területével, továbbá ugyancsak az előbbiek alapján $ABF\triangle \cong CDE\triangle \cong CDH\triangle \cong BGA\triangle$.

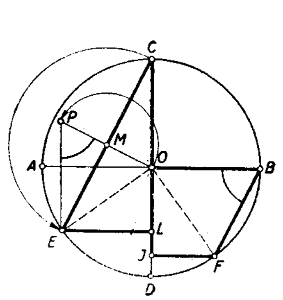
Tehát (területekről beszélve)

$$\begin{aligned} CEH &= CEDH - DEH = CEDH - ABGF = \\ &= CEDH - (ABF + ABG - ABN + FGN) = \\ &= CDE + CDH - ABF - ABG + ABN - FGN = ABN - FGN. \end{aligned}$$

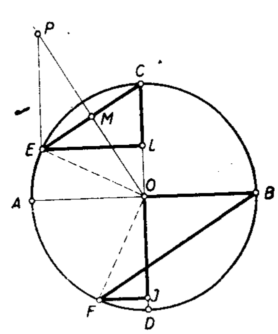
Könnyű a feladatot úgy fogalmazni, hogy a kettősség ne is lépjen fel. (L. 4. és 5. ábrát). Ha a BF és AG egyenesek metszéspontját mindenkor N-el jelöljük, akkor a CEH háromszög területe – *minden esetben* – az ABN és GFN háromszögek területének különbségével egyenlő.

A III. osztályosok más szempontból is érthetőnek fogják tartani a nyert eredményt. A koordináta-geometriában ugyanis kiderült, bizonyos szempontból előnyös lehet a területet előjeles mennyiségnek tekinteni, oly módon, hogy minden idomhoz megadjuk, hogy hogyan járjuk körül a kerületét (sokszögeknél ez például a csúcsok sorrendjével már meg van adva) és akkor azon idomok területét, melyek körüljárásban a jobbkezünk felé esnek, ellenkező előjelűnek nevezzük, mint amelyek körüljáráskor balról fekszenek. (Bármelyik lehet pozitív, de a másik minden esetben negatív lesz.) Ilyen értelmezés mellett hurkolt négyszög területéül mindig azon két háromszög területének különbsége adódik, melyekből a hurkolt négyszög áll.

III. megoldás: Mivel mindkét szóban forgó idom tükrös a CD átmérőre, mint tengelyre, így elég azt megmutatni, hogy a háromszög fele és a trapéz fele egyenlő területű, tehát ha az FG és EH húrok felezőpontjai J és L (6. ábra), akkor azt kell megmutatnunk, hogy a CEL háromszög és a $BFJO$ trapéz egyenlő területű.



6. ábra



7. ábra

Húzzuk meg az EC húr OM felező merőlegesét és forgassuk a CMO háromszöget az M pont körül az EM szakasz mellé. Az így keletkezett $ELOP$ derékszögű trapézban

$$EPO\sphericalangle = OBF\sphericalangle$$

mint merőlegesszárú szögek, mert PO merőleges a CE-vel párhuzamos BF húrra is. EP és OB, a trapézok hosszabb párhuzamos oldalai sugárnyi hosszúságúak és ugyancsak sugárnyi hosszúságú az EO ill. OF átló is. Így a $BFJO$ trapéz egybevágó, tehát egyenlő területű is, a $POLE$ trapézzal, tehát egyenlő területű a CEL háromszöggel is.

A hurkolt esetben is igaz, hogy az CEO háromszög átalakítható a PEO háromszöggé (7. ábra) és utóbbi egybevágó a BOF háromszöggel. Viszont előbbiből most el kell hagyni az ELO háromszöget, hogy a CEL háromszöget kapjuk. Ennek megfelelően BFO-ból OJF-fel egyenlő területet kell elvennünk. A közös rész elhagyása után a hurkolt négyszög OB-hez csatlakozó nagyobb háromszöge marad meg. Ebből kell még az FJ-hez csatlakozó kisebb háromszöget elvenni, hogy CEL-lel egyenlő területet kapjunk.