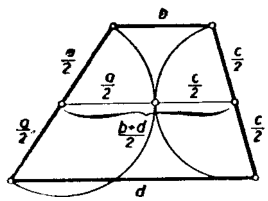
**I. megoldás:** *a)* Tegyük fel, hogy a szárak fölé rajzolt körök érintkeznek. (1. ábra)

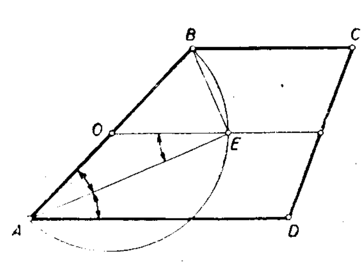



*1. ábra*

Ekkor a körök centrálisának hossza a sugarak összege, vagyis a szárak összegének a fele. Másrészt viszont a centrális éppen a trapéz középvonala, tehát hossza a párhuzamos oldalak összhosszának a fele. A feltételnek megfelelő trapézban tehát a szemközti oldalpárok összhossza megegyezik és tudjuk, hogy ha ez egy konvex négyszögre teljesül, akkor abba az oldalakat érintő kör írható. Tehát a feltétel elégséges.

*b)* Ha a trapézba az oldalakat érintő kör írható, akkor tudjuk, hogy a szemközti oldalpárok összege megegyezik s így a középvonal, melynek hossza a párhuzamos oldalak számtani közepe, egyben a szárak felének összegével is egyenlő s így a szárak mint átmérők fölé rajzolt körök közös pontban metszik a centrálist. De ha két körnek a centrálisukon van közös pontja, akkor e pontban érintkeznek. Tehát a feltétel szükséges is. Ezzel igazoltuk a bizonyítandó állítást.

**II. megoldás:** Tetszés szerinti $ABCD$ trapéz ($BC||AD$) $AB$ szára fölé rajzoljunk félkört. Messe ez a középvonalat $E$-ben (2. ábra).




*2. ábra*

Ekkor $E$-n mennek át az $A$ és $B$ csúcsból húzott szögfelezők. Valóban, a félkör középpontját $O$-val jelölve $AOE\triangle$, egyenlő szárú s így $OAE\sphericalangle = OEA\sphericalangle$, mivel pedig a középvonal párhuzamos a párhuzamos oldalakkal, így $OEA\sphericalangle = EAD\sphericalangle$, tehát $AE$ felezi az $A$-nál lévő szöget. Hasonlóan látható, hogy $BE$ szögfelező.

A trapézba akkor és csakis akkor írható kör, ha a négy szögfelező egy ponton megy keresztül, tehát akkor és csakis akkor, ha a szárak fölé rajzolt köröknek közös pontja van a középvonalon, tehát ha e körök érintkeznek.

Egyben azt is nyertük, hogy a körök érintkezési pontja a beírt kör középpontját adja.

*Megjegyzés.* A versenyzők legnagyobb része csak a feladat egyik felét bizonyította be, mert nem volt tisztában azzal, hogy az »*akkor és csakis akkor*« azt jelenti, hogy be kell bizonyítani egyrészt, hogy a feltétel *elégséges* (»akkor«) és másrészt, hogy a feltétel egyszersmind *szükséges* is (»csakis akkor«), vagyis azt, hogy a tétel megfordítható. Hogy ez nincs mindig így – tehát bizonyításra szorul – ezt a következő két igen egyszerű példa világítja meg. »Ha egy szám 5-re végződik, akkor osztható 5-tel. Itt az »akkor« nem toldható meg »csakis akkor«-ral, mert az 5-re végződés *elégséges* feltétel ugyan, de *nem szükséges*, hiszen a 0-ra végződő számok is oszthatók 5-tel. Viszont a következű állításban: »Egy szám *csakis akkor* osztható 6-tal, ha páros«, nem írhatunk a »csakis akkor« elé »akkor«-t, mert a szám páros volta ugyan *szükséges* feltétel, de *nem elégséges*, mert hiszen sok páros szám nem osztható 6-tal. Tehát a fenti két állítás egyike sem fordítható meg. (Ugyanis nem mondhatjuk: »Az 5-re, végződő számok oszthatók 5-tel és fordítva, ha egy-egy szám osztható 5-tel, akkor 5-re végződik.« Hasonlóképpen hamis: »Minden 6-tal osztható szám páros és fordítva, minden páros szám osztható 6-tal.«)