I. megoldás: Jelöljük a keresett szám ismeretlen számjegyeit $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$-nel. Ekkor a feladat olyan szám keresését kívánja, melyre

$$4\cdot x_1x_2\dots x_n4=4x_1x_2\dots x_n.$$

Itt az egymásutáni betűk egy szám 10-es számrendszerbeli alakjának számjegyeit jelentik, a szorzás jelét mindig kiírjuk. A baloldal utolsó jegyét beszorozva 4-gyel ($4\cdot 4=16$) adódik, hogy $x_n=6$; ezt a baloldalon beírva folytathatjuk a szorzást és kapjuk, hogy $4\cdot 6=24$, $24+1=25$ és így $x_{n-1}=5$. Hasonlóan folytatva tovább sorra a 2, 0, 1 jegyeket kapjuk. Utóbbit 4-gyel szorozva 4-et kapunk, és nem marad továbbviendő egység, így kapjuk, hogy

$$4\cdot 102\,564=410\,256.$$

Nem kell az eljárást a 4-es jegynél befejezni, ekkor olyan számokhoz jutunk, melyek az 102 564 számjegysorozat többszöri megismétlésével keletkeznek. Ezek mind rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal és az eljárásból belátható, hogy csak ezek a számok felelnek meg.

Lényegében ugyanígy adódik az eredmény akkor is, ha a jobboldali szám osztása révén határozzuk meg sorra a számjegyeket x_1-től kezdve.

II. megoldás: Legyen a 4-es előtti jegyekből álló szám x és legyen n jegyű. Ekkor az adott szám $10x+4$. A 4-es előre téve $4\cdot 10^n$-t fog jelenteni s ezt a számot követi az x szám. Így a feladat olyan x és n természetes számok keresését kívánja, amelyekre

$$4(10x+4)=4\cdot 10^n+x,\qquad 39x=4(10^n-4).$$

A feladat tehát olyan n egész szám keresését kívánja, melyre $4(10^n-4)$ osztható $39=3\cdot 13$-mal. Mivel

$$10^n-4=(10^n-1)-3=99\dots 9-3$$

osztható 3-mal, így csak a 13-mal való oszthatóságot kell biztosítani, és mivel 4 relatív prím a 13-hoz, így csak 10^n-4 lehet 13-mal osztható. $10-4$ és 10^2-4 nem osztható vele, tehát $n>2$. Ez esetben

$$10^n-4=100\cdot 10^{n-2}-4=4\cdot(25\cdot 10^{n-2}-1)=4[26\cdot 10^{n-2}-(10^{n-2}+1)].$$

Itt a 4 relatív prím a 13-hoz, 26 osztható vele, tehát a $10^{n-2}+1$-nek kell 13-mal oszthatónak lennie. Tudjuk, hogy 1001 osztható 13-mal, így $n-2=3$, $n=5$ a legkisebb kitevő, amelyik megfelel a feltételnek.

$$x=\frac{4\cdot(10^5-4)}{39}=10\,256,$$

a keresett szám tehát

$$102\,564.$$

Megjegyzés: 1. A 10^m+1 kifejezés ($n-2$ helyett m-et írtunk) mindig osztható 13-mal, ha m a 3-nak páratlan többszöröse, mert ha $m=3(2k+1)$, akkor

$$\begin{gathered}10^m+1=(10^3)^{2k+1}+1=\\=(10^3+1)(10^{3\cdot 2k}-10^{3(2k-1)}+10^{3(2k-2)}+\ldots-10^3+1)\end{gathered}$$

és $10^3+1=7\cdot 11\cdot 13$. Ha viszont $m=3(2k+1)+r$, $r=1,\ 2,\ 3,\ 4$ vagy 5, akkor

$$10^m+1=(10^{3(2k+1)+r}+10^r)-(10^r-1)=10^r(10^{3(2k+1)}+1)-(10^r-1).$$

Itt az első tag osztható 13-mal, a második viszont nem, mert 9, $99=9\cdot 11$, $999=9\cdot 111=9\cdot 3\cdot 37$, $9999=9\cdot 1001+990$ és $99\,999=99\cdot 1001+900$; és itt egyik tényező sem osztható 13-mal, ill. az első tag osztható vele, a második azonban nem, tehát ($m=n-2$-t visszaírva) a felírt egyenlet összes megoldásai

$$x=\frac{4(10^{6k+5}-4)}{39},\qquad k=0,\ 1,\ 2\ \ldots.$$

Könnyen látható, hogy ezek éppen az előző megoldásban említett alakú számok.

2. Kérdés, nem csak véletlen-e, hagy találtunk a feltételnek megfelelő számot. Erre csak azt jegyezzük meg, hogy az utolsó feladatnak sincs mindig megoldása. *Fermat* egy nevezetes számelméleti tételéből, illetőleg annak *Euler*től származó általánosításából következik, hogy olyan m kitevő minden a egész számhoz van, amelyre 10^m-1 osztható a-val, ha a páratlan és nem osztható 5-tel; ezzel szemben 10^m+1 pl. 3-mal nem lehet osztható, mert $10^m+1=(10^m-1)+2$, ami 3-mal osztva 2-t ad maradékul, mert az első tag osztható 3-mal, bármilyen természetes szám is m.