

**I. megoldás:** A változók egyike sem lehet 0, így a törtek eltávolíthatók és a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$2xy + 2xz - yz = 1, \quad 3xy + 2xz - yz = 0, \quad xz + yz = -1.$$

Ez elsőfokú egyenletrendszer, ha  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ -t tekintjük ismeretlennek. A második egyenletet levonva az elsőből, majd az egymásutáni egyenleteket 3, -2, 1-gyel, végül pedig 3, -2, -2-vel szorozva és összeadva kapjuk sorra, hogy

$$xy = -1, \quad xz = \frac{2}{3}, \quad yz = -\frac{5}{3}.$$

Innen

$$x^2 = \frac{xy \cdot xz}{yz} = \frac{2}{5}, \quad y^2 = \frac{xy \cdot xy}{xz} = \frac{5}{2}, \quad z^2 = \frac{xz \cdot yz}{xy} = \frac{10}{9}.$$

Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{5}{2} + \frac{10}{9} + 2\left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{90}. \end{aligned}$$

**II. megoldás:** A harmadik egyenletből  $x + y$  értékét behelyettesítve

$$(x + y + z)^2 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2,$$

így elég  $z^2$  értékét meghatároznunk. Az egyenleteknek az előző megoldásban szereplő alakját használva adjuk, össze az első és utolsó egyenletet:

$$2xy + 3xz = 0, \quad y = -\frac{3}{2}z.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$-\frac{9}{2}xz + 2xz + \frac{3}{2}z^2 = 0, \quad \text{innen } x = \frac{3}{5}z.$$

A nyert értékeket az első egyenletbe helyettesítve

$$-\frac{9}{5}z^2 + \frac{6}{5}z^2 + \frac{3}{2}z^2 = 1, \quad z^2 = \frac{10}{9},$$

tehát

$$(x + y + z)^2 = \frac{10}{9} + \frac{9}{10} - 2 = \frac{1}{90}.$$