I. megoldás: Az $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)$ azonosság alapján törtünk nevezője

$$\begin{aligned}
&(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=\\
=&(x-y+y-z)\big[(x-y)^2-(x-y)(y-z)+(y-z)^2\big]+(z-x)^3=\\
=&(x-z)\big[(x-y)(x-y-y+z)+(y-z)^2-(z-x)^2\big]=\\
=&(x-z)\big[(x-y)(x-2y+z)+(y-z+z-x)(y-z-z+x)\big]=\\
=&(x-z)\big[(x-y)(x-2y+z)-(x-y)(y-2z+x)\big]=\\
=&(x-z)(x-y)(x-2y+z-y+2z-x)=\\
=&(x-z)(x-y)(3z-3y)=3(x-y)(y-x)(z-x).
\end{aligned}$$

Hasonlóképpen a számláló

$$(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3=3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$$

Az adott tört tehát

$$\frac{3(x^2-y^2)(y^2-x^2)(z^2-x^2)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

II. megoldás: Tekintsük a nevezőt x polinomjaként. A polinommá átalakítás tényleges elvégzése nélkül is könnyen látható, hogy másodfokú polinomot kapunk, mert az első és harmadik kifejezésből adódó x^3-os tagok összege 0-t ad. Ennek a polinomnak 0 helyei $x=y$ és $x=z$, ami behelyettesítéssel azonnal látható. Így a nevező gyöktényezős előállítása azonos az $(x-y)(x-z)$ szorzatnak és az x^2-es tag együtthatójának szorzatával. Az első és harmadik kifejezésből x^2 együtthatója $-3y+3z=3(z-y)$; tehát a nevező azonos a

$$3(x-y)(x-z)(z-y)$$

szorzattal. Ebből megkapjuk a számlálót, ha x, y, z helyett x^2, y^2, z^2-et írunk, tehát a keresett tört:

$$\frac{3(x^2-y^2)(x^2-z^2)(z^2-y^2)}{3(x-y)(x-z)(z-y)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

III. megoldás: A számláló és nevező olyan három szám köbének összege, amely három szám összege 0. Ha pedig $a+b+c=0$, akkor kimutatható, hogy

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

Ugyanis, ha

$$a+b=-c$$

akkor köbre emelve

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^2=-c^3$$

vagyis

$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc.$$

E segédtétel egyébként közvetlenül adódik a következő azonosságból is:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

Ennek alapján kifejezésünk így írható:

$$\frac{3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$