(a) Az állításhoz nyilván elég az, hogy ha $n \geq 4$, akkor n^2 nem írható fel n^2-13 pozitív négyzetszám összegeként. Tegyük fel, hogy mégis felírható:

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n^2-13}^2,$$

ahol $a_1, \cdots, a_{n^2-13} \geq 1$. Rendezzünk át a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{n^2-13} (a_i^2 - 1) = 13. \tag{1}$$

Ha megmutatjuk, hogy a 13 nem írható fel x^2-1 alakú ($x \geqslant 1$) számok összegeként, készen vagyunk. Mivel $x \geq 4$ esetén $x^2-1>13$, az a_i-k értéke csak 1, 2 és 3 lehet, vagyis (1) bal oldalán minden tag 0, 3 vagy 8.

Ha nem szerepel 8-as, akkor az összeg osztható 3-mal; ha egy 8-as szerepel, akkor az összeg 3-mal osztva 2 maradékot ad; ha pedig legalább két 8-as szerepel, akkor az összeg legalább 16. Mivel a 13 3-mal osztva 1 maradékot ad és 16-nál kisebb, az összeg semmiképpen nem lehet 13.

Igaz azonban az – és ezt a (b) részben fel fogjuk használni –, hogy a 13-nál nagyobb egész számok mind felírhatók x^2-1 alakú számok összegeként, sőt akár 3-asokból és 8-asokból álló összegként is.

(b) Nyilván olyan n-et kell keresnünk, amelyre igaz, hogy n^2 felírható többek között két pozitív négyzetszám összegeként, vagyis n egy pitagoraszi számhármas legnagyobb eleme. A legkisebb ilyen számok:

$$5, \quad 10, \quad 13, \quad 15, \quad 17.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek közül az 5 és a 10 négyzete nem írható fel három négyzetszám összegeként, ezért $n=5$ és $n=10$ nem jó. Be fogjuk azonban bizonyítani, hogy $n=13$ megfelelő. Ehhez, mivel az (a) állítást már bebizonyítottuk, elég azt megmutatni, hogy $S(13) \geqslant 13^2-14=155$, azaz a $13^2=169$ felírható $1,2,3,\ldots,154$ vagy éppen 155 pozitív négyzetszám összegeként.

Legyen $k \leq 155$ és próbáljuk meg felírni 169-et k darab pozitív négyzetszám összegeként:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = 169,$$

ahol $a_1, \ldots, a_k \geq 1$. Rendezzük át ezt (1)-hez hasonlóan:

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i^2 - 1) = 169 - k. \tag{2}$$

Most tehát a $169-k$ számot kell felírnunk k darab x^2-1 alakú szám összegeként. Azok az x^2-1 alakú számok, amelyek 169-nél kisebbek, a következők:

$$0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,\ 63,\ 80,\ 99,\ 120,\ 143,\ 168.$$

Legyen a_1 a legnagyobb olyan pozitív egész szám, amelyre

$$a_1^2 - 1 \leq 155 - k$$

(ilyen létezik, mert $155-k \geq 0$), azaz

$$a_1^2 - 1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } 14 \leq 169-k \leq 16; \\ 3, & \text{ha } 17 \leq 169-k \leq 21; \\ 8, & \text{ha } 22 \leq 169-k \leq 28; \\ 15, & \text{ha } 29 \leq 169-k \leq 37; \\ 24, & \text{ha } 38 \leq 169-k \leq 48; \\ 35, & \text{ha } 49 \leq 169-k \leq 61; \\ 48, & \text{ha } 62 \leq 169-k \leq 76; \\ 63, & \text{ha } 77 \leq 169-k \leq 93; \\ 80, & \text{ha } 94 \leq 169-k \leq 112; \\ 99, & \text{ha } 113 \leq 169-k \leq 133; \\ 120, & \text{ha } 134 \leq 169-k \leq 156; \\ 143, & \text{ha } 157 \leq 169-k \leq 168. \end{cases}$$

Ezután a többi a_i-t úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\sum_{i=2}^{k} (a_i^2 - 1) = 169 - k - (a_1^2 - 1)$$

teljesüljön. Az a_1 választása miatt $14 \le 169 - k - (a_1^2 - 1) \le 36$. A továbbiakban tehát ezt a 14 és 36 közé eső számot kell $x^2 - 1$ alakú számok összegeként felírnunk.

Ha $169 - k - (a_1^2 - 1)$ osztható 3-mal, akkor írjuk fel legfeljebb 12 darab 3-as összegeként; ha 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor 2 darab 8-as és legfeljebb 6 darab 3-as összegeként; ha pedig 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor 1 darab 8-as és legfeljebb 9 darab 3-as összegeként írjuk fel.

Így a $169 - k - (a_1^2 - 1)$ számot felírtuk legfeljebb 12 darab $x^2 - 1$ alakú szám összegeként. (Természetesen ennél valamivel jobb eredményt is kaphatunk, ha például 5, illetve 8 darab 3-ast kicserélünk egy 15-ösre, illetve 24-esre. Könnyen ellenőrizhető, hogy $169 - k - (a_1^2 - 1)$ felírható legfeljebb 6 darab $x^2 - 1$ alakú szám összegeként is. Mindez azonban a megoldás menetét nem változtatja meg.)

Ha $k \geqslant 13$, akkor a többi tagot 0 nak választva megoldást adtunk (2)-re; ezzel bebizonyítottuk, hogy a 169 felírható $13, 14, \ldots, 155$ pozitív négyzetszám összegeként.

Azt, hogy $1, 2, \ldots, 12$ pozitív négyzetszám összegeként is előáll a 169, úgy igazoljuk, hogy megadunk egy-egy lehetséges felírást:

$$\begin{aligned}
169 &= 13^2;\\
169 &= 5^2 + 12^2;\\
169 &= 3^2 + 4^2 + 12^2;\\
169 &= 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 8^2;\\
169 &= 5^2 + 4 \cdot 6^2;\\
169 &= 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 6^2;\\
169 &= 5 \cdot 4^2 + 5^2 + 8^2;\\
169 &= 4 \cdot 3^2 + 5^2 + 3 \cdot 6^2;\\
169 &= 9 \cdot 4^2 + 5^2;\\
169 &= 3^2 + 10 \cdot 4^2;\\
169 &= 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 6^2.
\end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $n = 13$ valóban megfelelő.

(c) Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \geqslant 8$ egész számra $S(n) = n^2 - 14$, akkor $S(2n) = (2n)^2 - 14$. Ebből az állítás azonnal következik, hiszen akkor indukcióval igazolható, hogy minden nemnegatív egész m számra $n = 13 \cdot 2^m$ megfelelő.

Valóban, ezt $m = 0$-ra a (b) részben bebizonyítottuk, ha pedig $n = 13 \cdot 2^m$ megfelelő, akkor $n = 2 \cdot 13 \cdot 2^m = 13 \cdot 2^{m+1}$ is megfelelő.

Most tehát belátjuk, hogy ha $S(n) = n^2 - 14$, akkor $4n^2$ minden $1 \le k \le 4n^2 - 14$-re felírható k darab pozitív négyzetszám összegeként. Ebből, az (a) állítást is felhasználva, következik, hogy $S(2n) = 4n^2 - 14$.

Legyen először $k \le n^2 - 14$. Ebben az esetben n^2-et fel tudjuk bontani k darab pozitív négyzetszám összegére. Ha pedig ebben a felbontásban mindegyik négyzetszámot megszorozzuk 4-gyel, $4n^2$ egy felbontását kapjuk.

Legyen ezután k_1, k_2, k_3, k_4 négy $(n^2 - 14)$-nél nem nagyobb pozitív egész. Bontsuk fel n^2-et k_1, k_2, k_3, ill. k_4 darab négyzetszám összegére:

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k_1}^2; \qquad n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{k_2}^2;$$
$$n^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{k_3}^2; \qquad n^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{k_4}^2.$$

Ha ezeket a négyzetszámokat mind összeadjuk, $4n^2$-nek egy olyan felbontását kapjuk, amelyben $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ darab négyzetszám szerepel:

$$n^2 = a_1^2 + \cdots + a_{k_1}^2 + b_1^2 + \cdots + d_{k_2}^2 + c_1^2 + \cdots + c_{k_3}^2 + d_1^2 + \cdots + d_{k_4}^2.$$

Mivel $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ bármilyen 4 és $4(n^2 - 14) = 4n^2 - 56$ közötti szám lehet, ez a módszer jó konstrukciőt ad $4 \le k \le 4n^2 - 56$-ra.

Most bontsuk fel $4n^2$-et úgy, hogy n^2-et tetszőleges módon felbontjuk pozitív négyzetszámok összegére, és ehhez a felbontáshoz adjunk hozzá $3n^2$ darab 1^2-t. Ezzel $4n^2$-nek egy olyan felbontását kapjuk, amelyben a tagok száma $3n^2 + 1$ és $4n^2 - 14$ között bármilyen egész szám lehet.

A három konstrukció, amit mutattunk,

$$1 \le k \le n^2 - 14, \qquad 4 \le k \le 4n^2 - 56,$$

illetve

$$3n^2 + 1 \le k \le 4n^2 - 14$$

esetén adta meg $4n^2$-nek egy felírását k darab pozitív négyzetszám összegeként. Ha $n \geqslant 8$, akkor $4 < n^2 - 14$ és $3n^2 + 1 < 4n^2 - 56$, ezért minden $1 \le k \le n^2 - 14$-re működik valamelyik módszer.

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés. Ismeretes, hogy minden pozitív egész szám felírható legfeljebb 4 négyzetszám összegeként. Ennek felhasználásával be lehet bizonyítani, hogy ha n^2 felírható 2 és 3 pozitív négyzetszám összegeként is, akkor $S(n) = n^2 - 14$.