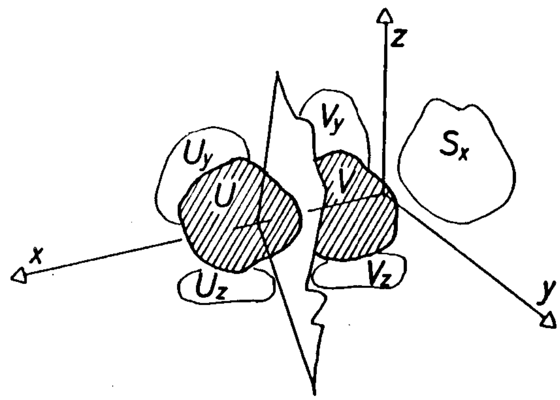
Az állítást a pontok száma szerinti teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Először is megjegyezzük, hogy ha a, b, c pozitív egészek és S azokból a rácspontokból áll, amelyeknek x koordinátája 1 és a, y koordinátája 1 és b, z koordinátája pedig 1 és c közé eső egész szám, akkor (1)-ben egyenlőség van, mert $|S| = abc$, $|S_x| = bc$, $|S_y| = ac$ és $|S_z| = ab$.

Ezért az indukciós lépésnél S-nek csak olyan részhalmazait érdemes vizsgálni, amelyeket úgy kapunk, hogy S-et egy, valamelyik koordinátasíkkal párhuzamos síkkal két részre vágjuk.

Ha csak egy pont van, akkor $|S| = |S_x| = |S_y| = |S_z| = 1$, és az állítás igaz.

Tegyük most fel, hogy a pontok száma $|S| = n > 1$, és n-nél kevesebb pontra az állítás igaz.



Először megmutatjuk, hogy van olyan sík, amely valamelyik koordinátasíkkal párhuzamos és két nem üres részre osztja S-et. Ha S-et nem lehet egy, az x-tengelyre merőleges síkkal kettévágni, akkor S minden pontjának ugyanaz az x-koordinátája. Hasonlóan, ha az y- és a z-tengelyre merőlegesen sem lehet két nem üres részre kettévágni, akkor a pontoknak az y- és z- koordinátája is megegyezik. Mivel azonban S-nek legalább 2 pontja van, ez lehetetlen.

Mivel a feladatban a koordináta-tengelyek szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy az x- tengelyre merőlegesen vágtuk szét S-et két nem üres részre.

Legyen a két rész U és V; pontjaiknak az yz-, xz-, xy-síkokra való ortogonális vetületeiből álló halmazok U_x, U_y, U_z, illetve V_x, V_y, V_z.

Az U és V halmazok konstrukciójából következik, hogy

$$|U| + |V| = |S|, \qquad |U_y| + |V_y| = |S_y|, \qquad |U_z| + |V_z| = |S_z|,$$
$$|U_x| \le |S_x| \text{ és } |V_x| \le |S_x|.$$

Ezen kívül, mivel U-nak és V-nek n-nél kevesebb pontja van, az indukciós feltevés szerint

$$|U|^2 \le |U_x||U_y||U_z| \text{ és } |V|^2 \le |V_x||V_y||V_z|.$$

Mindezek és a Cauchy – Bunyakovszkij –Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{gathered}|S_x||S_y||S_z| = \\ = |S_x|(|U_y| + |V_y|)(|U_z| + |V_z|) = |S_x| \left(\sqrt{|U_y|}^2 + \sqrt{|V_y|}^2\right)\left(\sqrt{|U_z|}^2 + \sqrt{|V_z|}^2\right) \geqslant \\ \geqslant |S_x| \left(\sqrt{|U_y|}\sqrt{|U_z|} + \sqrt{|V_y|}\sqrt{|V_z|}\right)^2 = \\ = \left(\sqrt{|S_x|}\sqrt{|U_y|}\sqrt{|U_z|} + \sqrt{|S_x|}\sqrt{|V_y|}\sqrt{|V_z|}\right)^2 \geqslant \\ \geqslant \left(\sqrt{|U_x||U_y||U_z|} + \sqrt{|V_x||V_y||V_z|}\right)^2 \geqslant (|U| + |V|)^2 = |S|^2.\end{gathered}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.