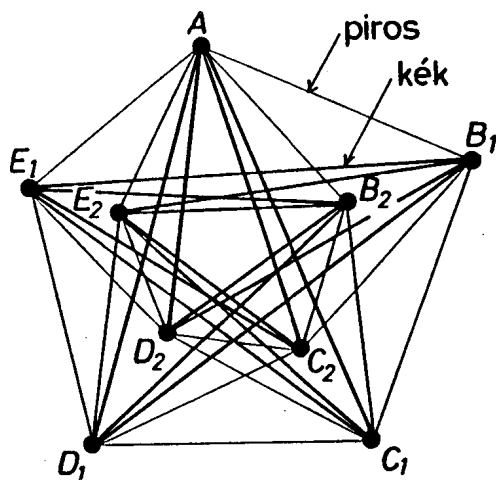


A feladat valójában egy gráfelméleti kérdés, amely így fogalmazható át: Mekkora az a legkisebb n , amelyre teljesül, hogy ha egy 9 pontú gráfnak n éle van, akkor azokat akárhogyan színezzük ki pirosra vagy kékre, a gráf mindig tartalmazni fog egyszínű háromszöget?

A megoldáshoz fel fogjuk használni a következő tételt: ha egy gráfnak legalább 6 pontja van, akkor a gráf vagy a komplementere biztosan tartalmaz háromszöget, vagy másképpen fogalmazva: ha egy legalább 6 pontú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor a gráf biztosan tartalmaz egyszínű háromszöget.

A 9 pontú teljes gráfnak $\binom{9}{2} = 36$ éle van. Bizonyítjuk, hogy ha a gráfnak legalább 33 éle van (azaz legfeljebb 3 él hiányzik), akkor mindig tartalmaz egyszínű háromszöget. Ezen kívül példát mutatunk olyan kiszínezett gráfra, amelynek 32 éle van, és nem tartalmaz egyszínű háromszöget. Ezekből pedig az következik, hogy $n = 33$ a keresett szám.

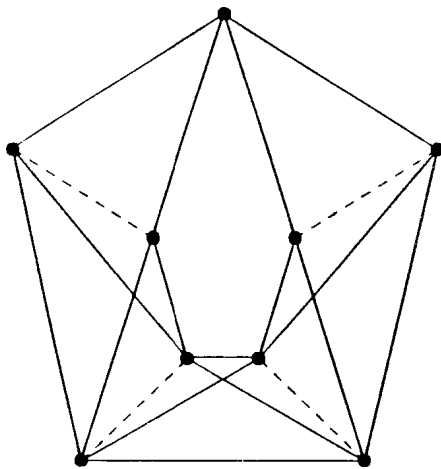


1. ábra

Ha a gráfból legfeljebb 3 él hiányzik, akkor válasszuk ki mindegyik hiányzó élnek valamelyik végpontját, és ezt a legfeljebb 3 kiválasztott pontot hagyjuk el a gráfból. Ezzel az eredetinek egy olyan részgráfját kapjuk, amelynek legalább 6 pontja van és amelyben már nincsenek hiányzó élek (vagyis a részgráf teljes). Az előbb idézett tétel szerint tehát a részgráf tartalmaz egyszínű háromszöget. A háromszög viszont az eredeti gráfnak is része. Ezzel igazoltuk, hogy ha a gráfnak legalább 33 éle van, akkor tartalmaz egyszínű háromszöget.

Most mutatunk egy 9 pontú, 32 élű gráfot, amelynek éleit ki lehet színezni két színnel úgy, hogy ne tartalmazzon egyszínű háromszöget (1. ábra). Megjegyezzük, hogy a négy hiányzó él közül semelyik kettőnek nem lehet közös végpontja, mert ellenkező esetben el lehetne hagyni három pontot (az egyiket a két él közös végpontjának választva) úgy, hogy a megmaradó 6 pontú gráf teljes legyen, az pedig biztosan tartalmaz egyszínű háromszöget.

Ez a feltétel máris meghatározza, hogy mi a gráf; nekünk csak a színezést kell előírni.



2. ábra

A jobb áttekinthetőség érdekében folytonos szakaszokkal ábrázoljuk a piros éleket, a kék színűeket nem rajzoljuk be. A teljes gráfból kimaradó $36 - 32 = 4$ élet szaggatott vonal jelzi. A 2. ábráról jól látszik, hogy a gráf sem teljes háromszöget, sem pedig üres háromszöget nem tartalmaz.

Megjegyzés. A felhasznált segédtelem a következőképpen bizonyítható be. Legyen A a gráf egy tetszőleges pontja. Mivel A -ból legalább 5 él indul ki, az élek között van három egyszínű, mondjuk piros. Legyen ezek végpontja B , C és D .

Ha a B , C , D pontok közül kettőt piros él köt össze, akkor ez a két pont A -val együtt egy piros háromszöget alkot. Ha pedig a BCD háromszög élei közül egyik sem piros, akkor BCD egy kék háromszög.