Ha $f(x) = x$ minden x valós számra, akkor (1) nyilván teljesül. Be fogjuk bizonyítani, hagy ez az egyetlen megoldás.

Először megmutatjuk, hogy f bijektív, azaz minden valós számot pontosan egyszer vesz fel. Ha c tetszőleges valós szám, akkor (1)-be $y = (c-(f(x))^2)$-et írva látjuk, hogy f felveszi a c értéket. Azt kell még igazolnunk, hogy különböző számokhoz különböző értéket rendel. Legyen y_1 és y_2 két különböző szám és x tetszőleges. Az (1) azonosság alapján

$$f(x^2 + f(y_1)) = y_1 + (f(x))^2$$

és

$$f(x^2 + f(y_2)) = y_2 + (f(x))^2.$$

Ha $f(y_1) = f(y_2)$ lenne, akkor a bal oldalon mindkét egyenletben ugyanaz a szám állna. Ez viszont ellentmond annak, hogy a jobb oldalak különbözőek. Tehát $f(y_1) \neq f(y_2)$, a függvény valóban bijektív.

Másodszor bebizonyítjuk, hogy a függvény páratlan, azaz minden x valós számra $f(-x) = -f(x)$, speciálisan $f(0) = 0$. Legyen $x \neq 0$, y pedig tetszőleges. Írjuk fel az (1) azonosságot az x, y és a $-x, y$ számpárokra:

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2,$$
$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(-x))^2.$$

Mivel a bal oldalak megegyeznek, $(f(x))^2 = (f(-x))^2$, amiből $|f(x)| = |f(-x)|$; másrészt f bijektív volta miatt $f(x) \neq f(-x)$. Ezekből pedig az következik, hogy $f(-x) = -f(x) \neq 0$. Látjuk, hogy f a 0-t a 0-n kívül máshol nem veheti fel, ezért $f(0)$ csak 0 lehet; f tehát tényleg páratlan.

Most írjunk (1)-ben x helyére 0-t; azt kapjuk, hogy tetszőleges y-ra $f(f(y)) = y$.

Megmutatjuk még, hogy f monoton nő, azaz ha $a \leq b$ két valós szám, akkor $f(a) \leq f(b)$. Legyen c olyan szám, amelyre $b = a + c^2$. (Mivel $a \leq b$, létezik ilyen.) Ha (1)-be $x = c$-t és $y = f(a)$-t írunk, azt kapjuk, hogy

$$f(b) = f(c^2 + a) = f(c^2 + f(y)) = y + (f(c))^2 = f(a) + (f(c))^2 \geq f(a).$$

Ezek után már könnyűszerrel beláthatjuk, hogy $f(x) = x$ minden x-re. Legyen x tetszőleges. Ha $f(x) < x$, akkor a monotonitás miatt $f(f(x)) \leq f(x)$, ami ellentmondás, mert $f(f(x)) = x$. Ha pedig $f(x) > x$, akkor $f(f(x)) \geq f(x)$, ami szintén ellentmondás. Tehát csak $f(x) = x$ lehetséges.