I. megoldás. Tetszőleges $k \in \mathbf{N}$ esetén, ha k diadikus alakja

$$k = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{②} = \sum_{s=0}^{n} a_s \cdot 2^s \qquad (a_i = 0 \text{ vagy } 1;\ i = 0,\ \dots, n),$$

akkor legyen

$$y_k = \sum_{s=0}^{n} a_s \cdot 2^{-as},$$

ahol $a > 1$ a feladatban rögzített valós szám. Legyen most $i, j \in \mathbf{N}, i \neq j$, továbbá i és j kettes számrendszerbeli alakja

$$i = \overline{b_n b_{n-1} \dots b_0}_{②} \quad \text{és} \quad j = \overline{c_m c_{m-1} \dots c_0}_{②}.$$

Feltehető, hogy $i > j$, és ekkor $n \geq m$. Tegyük fel továbbá, hogy r az a természetes szám, amelyre i és j diadikus alakja az utolsó r db jegyben megegyezik, de $(r+1)$-edik jegyében – hátulról olvasva – már különbözik:

$$r = \min\{s|\ b_s \neq c_s, \qquad 1 \leq s \leq n\},$$

($m < s \leq n$ esetén legyen $c_s = 0$). Ekkor

(1) $$|i - j| = i - j \geq 2^r,$$

és $a > 1$ miatt

$$|y_i - y_j| = \left| \sum_{s=0}^{n} b_s \cdot 2^{-as} - \sum_{s=0}^{m} c_s \cdot 2^{-as} \right| = \left| \sum_{s=r}^{n} b_s \cdot 2^{-as} - \sum_{s=r}^{n} c_s \cdot 2^{-as} \right| \geq$$

$$\geq 2^{-ar} - 2^{-a(r+1)} - 2^{-a(r+2)} - \dots - 2^{-an} > 2^{-ar} \left(1 - \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-as} \right) =$$

$$= 2^{-ar} \left(1 - 2^{-a} \frac{1}{1 - 2^{-a}} \right) = 2^{-ar} \left(1 - \frac{1}{2^a - 1} \right) = 2^{-ar} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1}.$$

Ezt (1)-gyel egybevetve:

$$|y_i - y_j| \cdot |i - j|^a > 2^{-ar} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1} \cdot (2^r)^a = \frac{2^a - 2}{2^a - 1},$$

ami azt jelenti, hogy az

$$x_k = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} y_k \quad (k = 0, 1,\ \dots)$$

sorozat $i, j \in \mathbf{N}; \quad i \neq j$ esetén

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a > 1,$$

továbbá (y_k) korlátos volta miatt (x_k) is korlátos:

$$0 \leq x_k = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} y_k < \frac{2^a - 1}{2^a - 2} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-as} = \frac{2^a}{2^a - 2}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

II. megoldás. Konstrukciót adunk az $a = 1$ esetre – ez nyilván megfelelő $a > 1$ esetére is.

Alapötletünk a következő: Tegyük fel, hogy γ olyan (irracionális) szám, amelynek minden $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbf{Z}; \quad q > 0)$ közelítő törtjére az eltérés

(2) $$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\alpha q^2},$$

ahol $\alpha > 0$ valamilyen rögzített konstans. Ekkor tekintjük az

$$x_k = \alpha \cdot \{\gamma k\} \quad (k = 0, 1,\ \dots)$$

sorozatot, ahol $\{t\} = t - [t]$ a t szám törtrészét jelöli. Világos, hogy (x_k) korlátos:

$$0 < x_k < \alpha,$$

továbbá $i, j \in \mathbf{N}; \quad i \neq j$ esetén ($i > j$ feltehető)

$$|x_i - x_j| \cdot |i-j| = \alpha \cdot |\{\gamma i\} - \{\gamma j\}| \cdot |i-j| =$$
$$= \alpha \cdot |(\gamma i - \gamma j) - ([\gamma i] - [\gamma j])| \cdot |i-j|,$$

ill. a $q = i - j\ (> 0),\ p = [\gamma i] - [\gamma j]$ jelöléssel p és q egészek, tehát (2) szerint

$$|x_i - x_j| \cdot |i-j| = \alpha \cdot |q\gamma - p| \cdot q = \alpha q^2 \cdot \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq 1,$$

vagyis az (x_k) sorozat megfelelő.

Az is látszik, hogy az

$$x_k' = x_k - \frac{\alpha}{2} \quad (k = 0, 1, \ \ldots) \text{ sorozatra} \quad |x_k'| < \frac{\alpha}{2}, \text{továbbá}$$
$$|x_i' - x_j'| \cdot |i-j| = |x_i - x_j| \cdot |i-j| \geq 1,$$

tehát az x_k' sorozat is megfelelő.

Ezek szerint csak a (2)-t kielégítő γ-t és α-t kell találnunk, sőt minél kisebb az α, annál jobb a sorozatunk korlátja.

(2)-re talán $\gamma = \sqrt{2}$ és $\alpha = 3$ adja a legegyszerűbb példát:

(3) $$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2}$$

mindig fennáll. Ha ugyanis lenne olyan $\frac{p}{q}$ közelítő tört, amelyre

(4) $$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{3q^2},$$

akkor

$$\sqrt{2}q - \frac{1}{3q} \leq p \leq \sqrt{2}q + \frac{1}{3q},$$

azaz négyzetre emelés és rendezés után

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2 \leq p^2 - 2q^2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2$$

lenne, amiből

$$|p^2 - 2q^2| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2$$

következnék. (4) nyilván nem állhat fenn $q = 1$ esetén, ezért $q \geq 2$, tehát

$$|p^2 - 2q^2| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3 \cdot 2}\right)^2 = \frac{2\sqrt{2} + \frac{1}{12}}{3} < 1.$$

vagyis

$$p^2 - 2q^2 = 0,$$

hiszen $|p^2 - 2q^2|$ nemnegatív egész.

Mivel $\sqrt{2}$ irracionális, ezért $p^2 - 2q^2 = 0$ ellentmondást jelent, ami (3)-at igazolja.

Ezzel sikerült megadnunk olyan (x_k) sorozatot, amelyre

$$|x_k| < \frac{3}{2}, \quad \text{és} \quad |x_i - x_j| \cdot |i-j| \geq 1$$

teljesül, ha $i, j \in \mathbf{N}; \quad i \neq j$.