

Úgy fogjuk megszámolni az éleket, hogy már két olyan él is tartozzék minden legalább másodfokú csúcshoz, amelyekre egymáshoz relatív prím számokat írtunk; ez nyilván elegendő a feladatbeli állítás bizonyítására.

Legyenek a gráf legalább másodfokú csúcsai A_1, A_2, \dots, A_n (ha ilyen csúcson nincsen, akkor triviális az állítás). Mivel a gráf összefüggő, ezért bármely csúcsból bármely csúcshoz vezet út a gráfban. Menjünk el A_1 -ből A_2 -be, A_2 -ből A_3 -ba, \dots , A_{n-1} -ből A_n -be, végül A_n -ből A_1 -be a gráf egy-egy tetszőleges élsorozatán keresztül! Így egy olyan utazást teszünk a gráfban, amelynek során minden A_i -t ($i = 1, 2, \dots, n$) érintünk és *elhagyunk* legalább egyszer. Tegyük fel, hogy utazásunk alatt sorra számozzuk az érintett éleket az $1, 2, \dots, l$ számokkal ($1 \leq l \leq k$) – azzal a kikötéssel, hogy ha egy élre

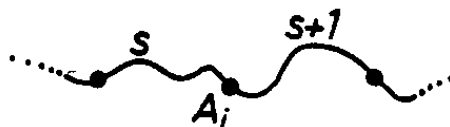
a) már írtunk számot, akkor arra új számot már nem írunk.

b) még nem írtunk számot (tehát az utazás során először érintjük), akkor 1-gyel nagyobb számot írunk rá, mint amelyet utoljára használtunk.

Ezek szerint mindig csak az „új” – addig még nem érintett – élekre kell számot írunk, és összesen l db élt számoztunk meg a k db él közül.

Az utazásnál még egy dologra kell ügyelnünk:

Ha valamelyik A_i csúcsot ($i = 2, 3, \dots, n$) *először* érintjük utazásunk során (ez biztosan bekövetkezik minden i -re valamikor), akkor A_i -t *másik élen keresztül* hagyjuk el, mint amilyen keresztül megközelítettük; ez megtehető, mert A_i legalább másodfokú. Mivel az A_i -ből kiinduló élek egyikét sem érintettük azelőtt, ezért a számozási algoritmus szerint ebben a lépésben A_i -nek 2 élére 2 *szomszédos* számot kell írunk.



Ha utazásunkat és a számozást az előírt módon végezzük, akkor teljesül, hogy

- az A_1 -ből kiinduló egyik élre (utazásunk első élére) az 1-et írjuk,
- A_i -ből ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) kiindul 2 olyan él, amelyre szomszédos számokat írunk.

Mivel x és y pozitív egészek relatív prímek egymáshoz, ha $x = 1$ vagy $y - x = 1$, ezért a megoldás elején megfogalmazott követelményünk teljesül, vagyis – a fennmaradó $k - l$ db élt tetszőlegesen megszámolva az $l + 1, l + 2, \dots, k$ számokkal – a feladat állítását beláttuk.